

オープンハウス 2009年6月11日

---

# 平面ネットワークの解析

河原林 健一

国立情報学研究所

k\_keniti@nii.ac.jp

[http://www.nii.ac.jp/~k\\_keniti](http://www.nii.ac.jp/~k_keniti)

日常生活には、平面構造のネットワークが多い。  
例えば、

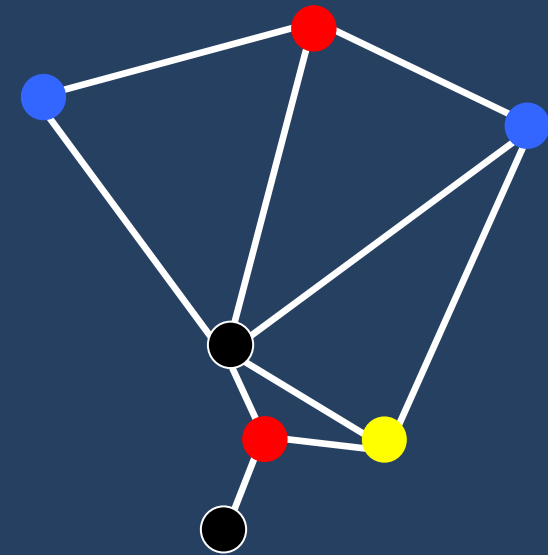
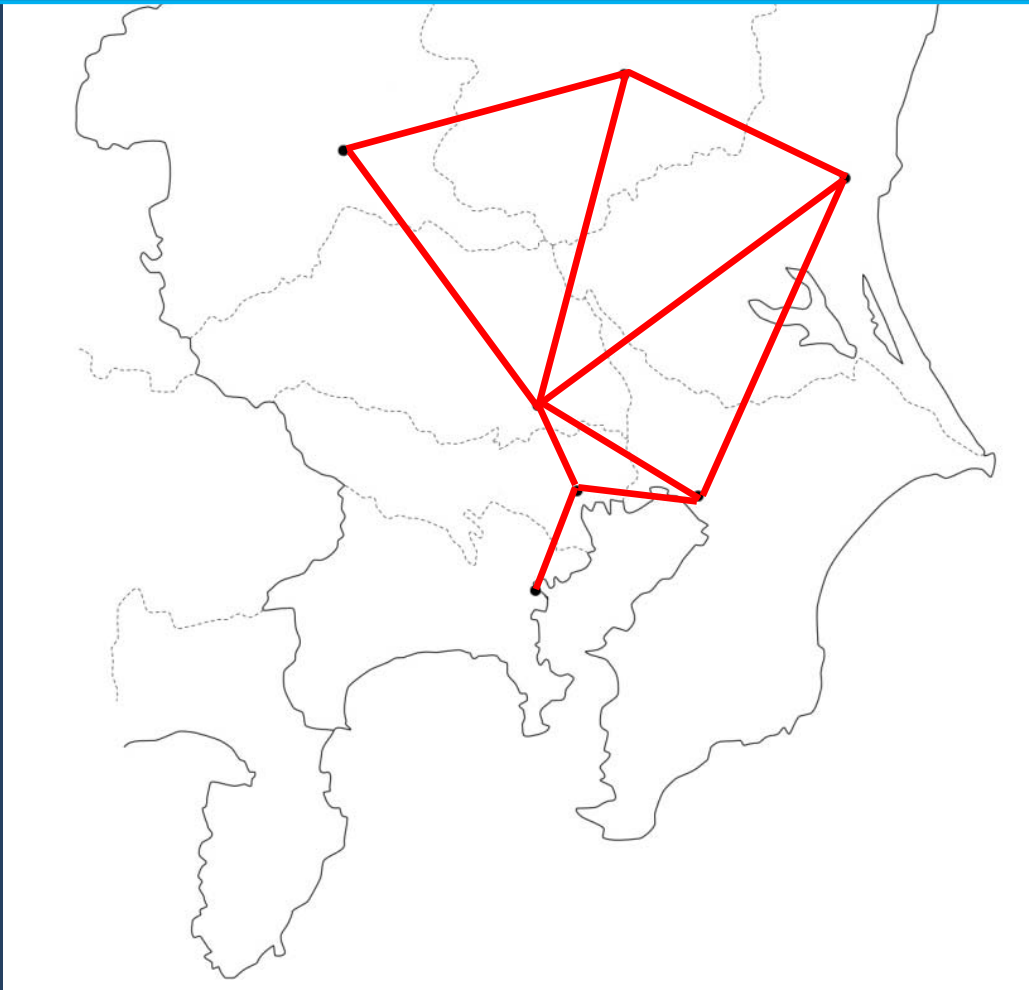
1. 鉄道網
2. 道路網 etc...

これらの「平面構造」という特徴を利用することで、ネットワークの理論的な解析が可能

- VLSI等のネットワーク構築
- 迅速なカーナビゲーションシステムの  
情報アップデート etc...

ネットワークの解析のためには「**平面グラフ**」の研究が必要不可欠！

平面グラフとは、「辺をそれぞれ交差しないように平面上に描くことができるグラフ」を指す



平面グラフの一例

ネットワークを理論的に解析するためには、実際のネットワークが平面（またそれに近い構造の）グラフかどうかを判定する必要がある！！

問題： 与えられたネットワークが「平面グラフ」かどうかを、どのように判定するか？

問題： 与えられたネットワークが「平面グラフ」ならどのように「よい」平面グラフを得るか？

→この問題の解答を得るためには  
「**マイナー操作**」を理解する必要がある。

## マイナー操作とは？？？

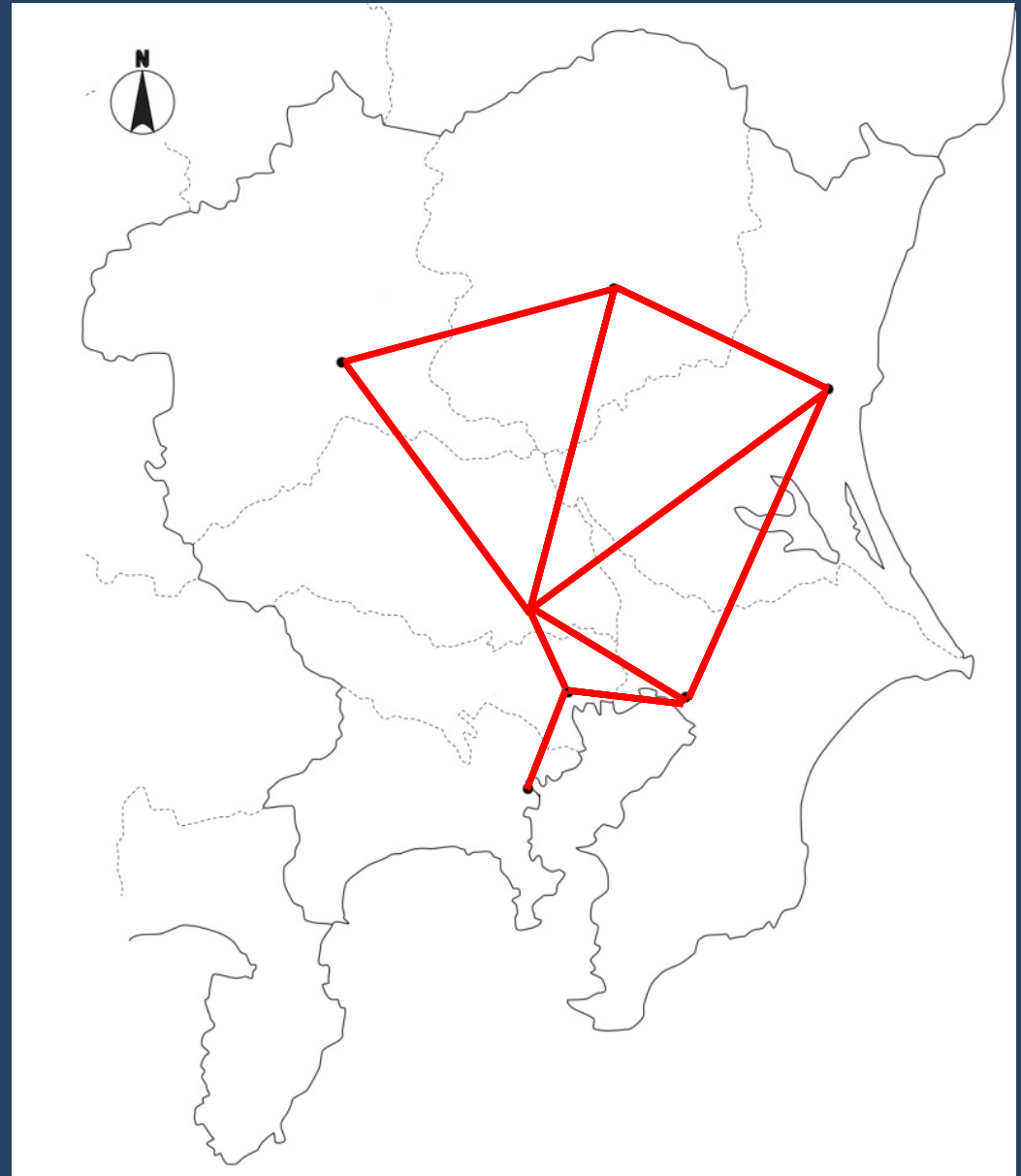
どんな平面グラフでも，次の3つの操作を加えた後も平面グラフの性質は変わらない

1. 辺を取り除く.
2. 頂点を取り除く.
3. 辺を縮約する.

この3つの操作をグラフ理論の分野では「**マイナー操作**」という

## マイナー操作

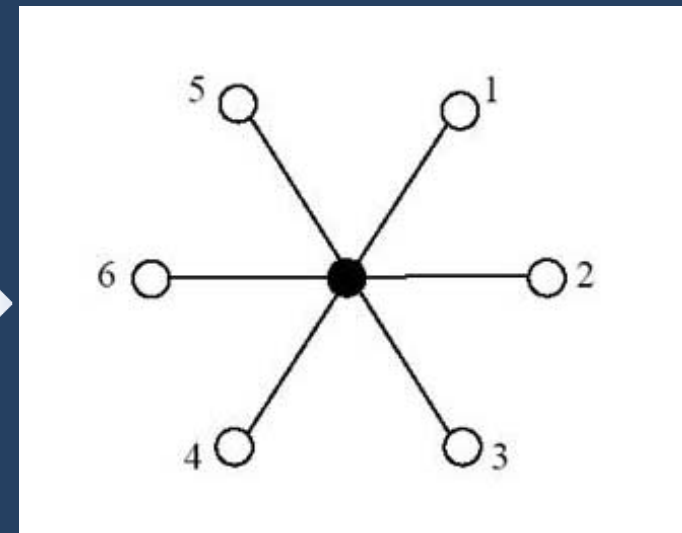
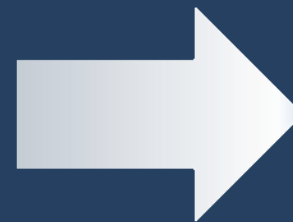
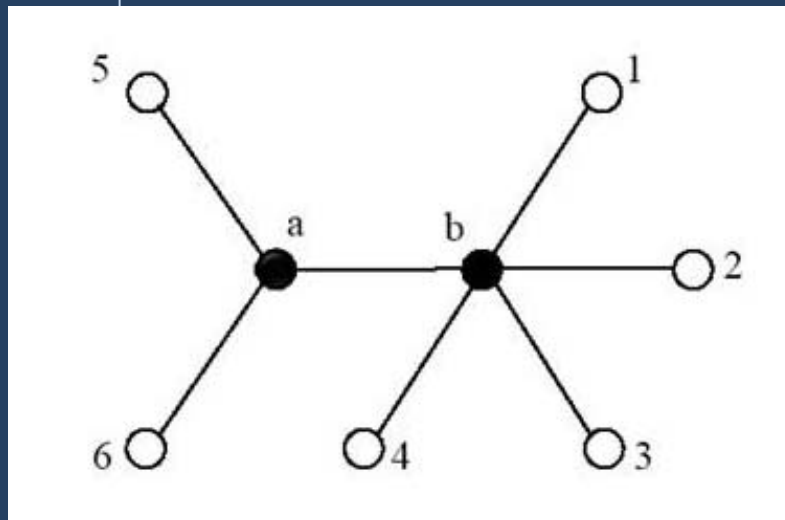
1. 辺を取り除く.
2. 頂点を取り除く.
3. 辺を縮約する.



## マイナー操作

1. 頂点を取り除く.
2. 辺を取り除く.

3. 辺を縮約する.

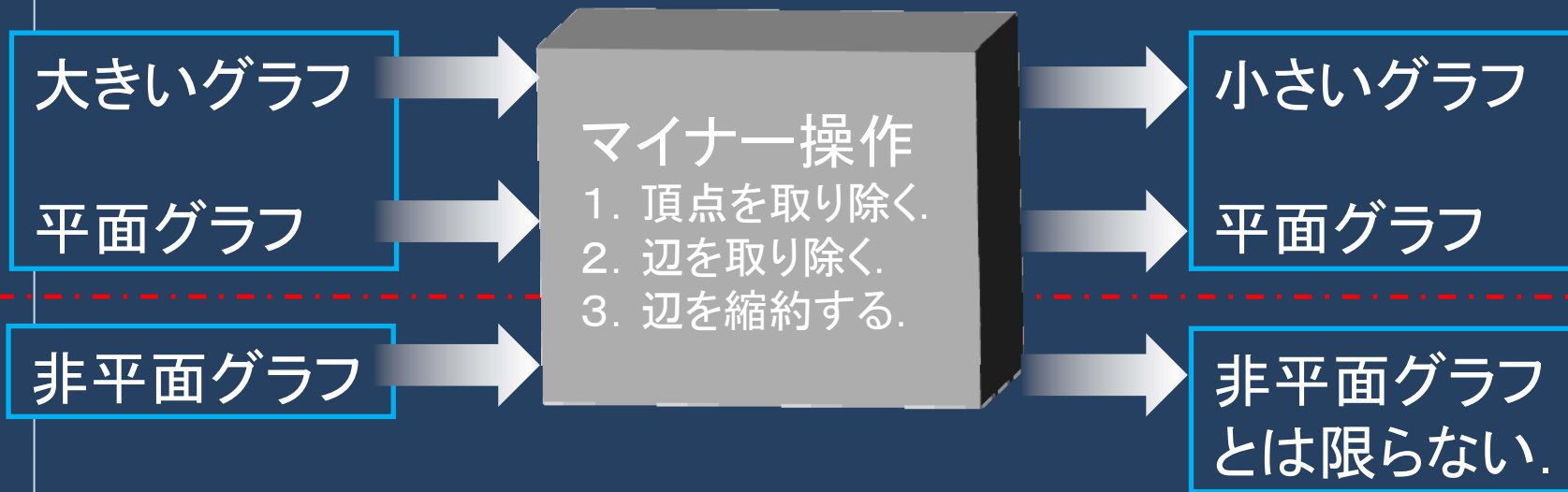


この3つの操作(1. 頂点を取り除く 2. 辺を取り除く 3. 辺を縮約する)をしても平面グラフがその性質を保存することを

「マイナー操作に関して閉じている」と呼ぶ

重要:「全ての平面グラフはマイナー操作に関して閉じている」が、「マイナー操作に関して閉じているグラフが全て平面グラフ」ではない!





与えられたグラフが平面グラフかどうかを判定するためには、「非平面グラフ」から、「平面グラフ」になる「最小」のグラフは何かを調べる必要がある。

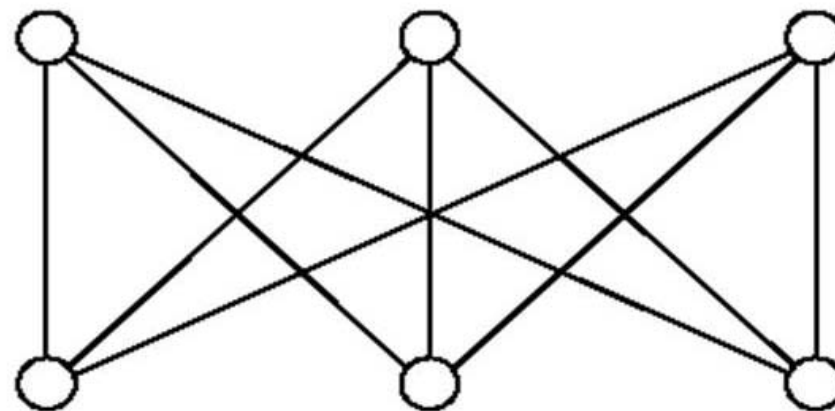
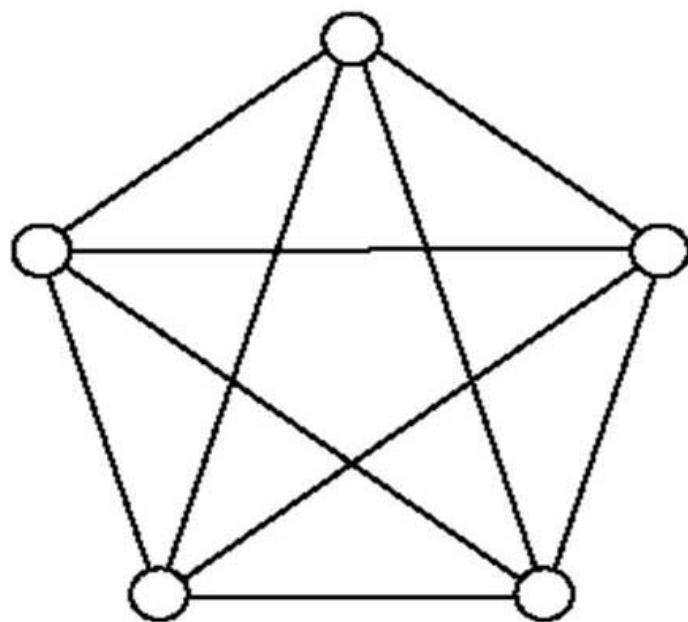
非平面から、平面になる「最小」のグラフは何か？

クラトスキーの定理 その1

非平面の「最小」なグラフは、 $K_{3,3}$ と $K_5$ である。

与えられたグラフが平面グラフである必要十分条件は、「どのようなマイナー操作をしても、 $K_{3,3}$ と $K_5$ にならない」ということである

# $K_{3,3}$ と $K_5$ グラフの例



左:  $K_5$ グラフ 右:  $K_{3,3}$ グラフ

## クラトスキーの定理 その2

平面グラフに対しては、  
「禁止」すべき「最小グラフ」は、  
 $K_{3,3}$ と $K_5$ のみである。



平面グラフかどうかを判断するための  
指標になる。平面グラフかどうかの判  
定に利用されている。

実用の場面では、平面グラフの判定を可能な限り迅速に行う必要がある！！

## 平面グラフの判定の計算量

(Hopcroft, Tarjan)

平面グラフは、線形時間で判定できる

(ここでいう『線形時間』とは、入力の頂点数に関して線形関数のステップという意味である)。

この判定アルゴリズムを導き出すために、クラトスキーの定理が利用されている。

実用の場面では、平面グラフを可能な限り迅速に得る必要がある！！

## 平面グラフの判定の計算量 (Hopcroft, Tarjan)

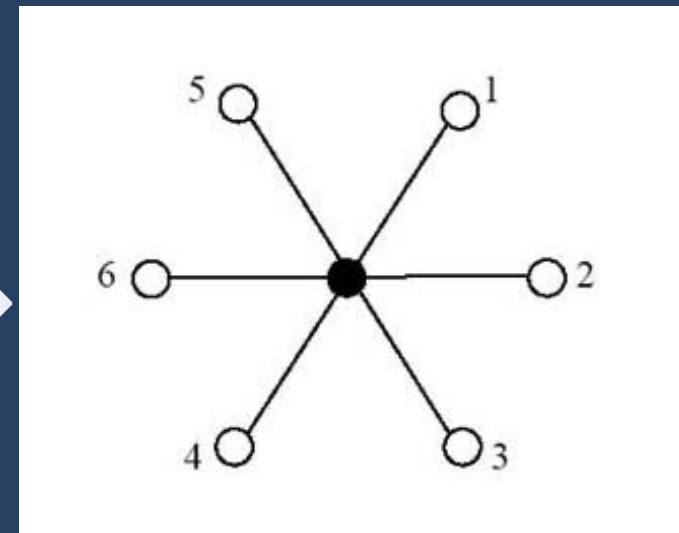
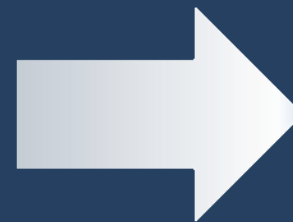
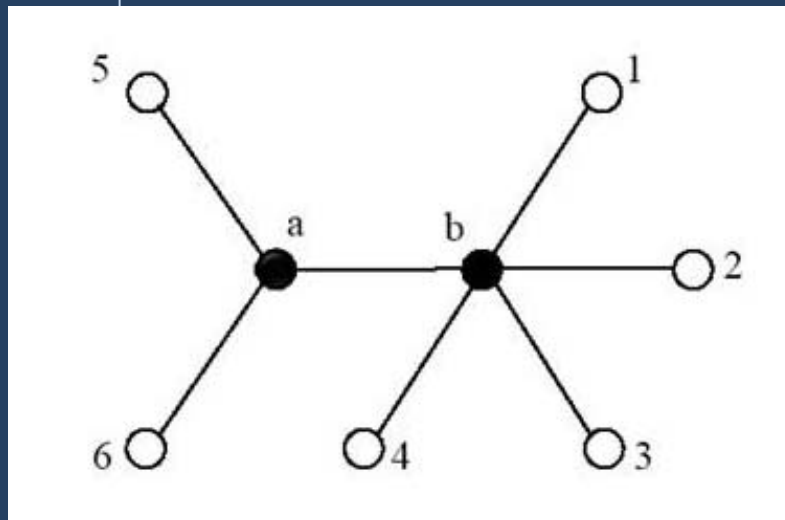
平面グラフを、線形時間で得ることができる  
(ここでいう『線形時間』とは、入力の頂点数に関して線形関数のステップという意味である)。

このアルゴリズムは、マイナーの「逆操作」を利用し、高速で平面ネットワークを得ることができる

## マイナー操作

1. 頂点を取り除く.
2. 辺を取り除く.

3. 辺を縮約する.



## 私の研究の一例

実際のネットワーク網は、「完全な平面」とは限らない。(例えば、交通網における立体交差や鉄道網での地下トンネル等)

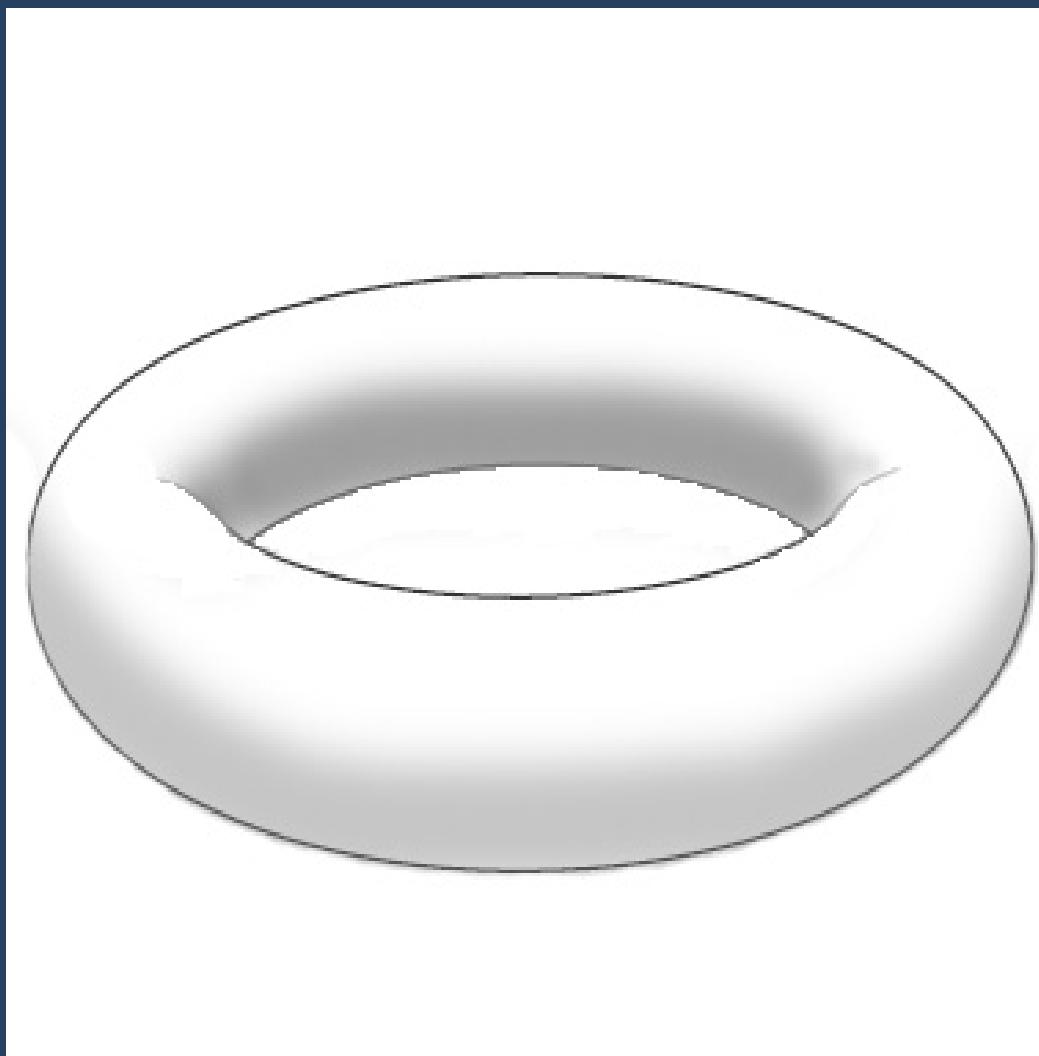
- 与えられたグラフが、 $k$ 交差グラフであるかの判定を線形時間で行うことは可能か？
  - 与えられたグラフが、 $k$ -平面グラフであるかの判定を線形時間で行うことは可能か？
- ...等を明らかにする必要がある



最近の研究で、以下の性質のグラフを線形時間で判定することが可能であることを明らかにした (STOC'07, STOC'08, FOCS'08, STOC'09等).

1.  $k$ -平面グラフ.
2.  $k$ 交差グラフ.
3. 曲面上に埋め込めるグラフ  
(例えばドーナツ状のトーラス).

### 3. 曲面上に埋め込めるグラフ(ドーナツ状のトーラス)



## 私の研究の一例

実際のネットワーク網は、「完全な平面」とは限らない。(例えば, 交通網における立体交差や鉄道網での地下トンネル等)

- $k$ 交差グラフでのデータ更新の高速化
  - $k$ -平面グラフでのデータ更新の高速化
- ...等の開発

(STOC'07, STOC'08, FOCS'08, STOC'09など)