

# 最小二乗問題の新解法

## New Solvers for Least Squares Problems

保國 惠一 Keiichi Morikuni

総合研究大学院大学 複合科学研究科 情報学専攻

5年一貫制博士課程2年生

崔 小可

Xiaoke Cui

速水 謙

Ken Hayami

総合研究大学院大学 複合科学研究科 情報学専攻 国立情報学研究所 情報学プリンシプル研究系

### 最小二乗問題に対する内部反復を用いたクリロフ部分空間法

Inner iteration preconditioned Krylov subspace methods for least squares problems

#### なにが分かる？

最小二乗問題  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$

を解く計算手法の性質

#### どんな研究？

- 最小二乗問題を解く計算手法の開発
- 理論的な性質の解明
- 実装上の数値実験での検証

#### 概要 Abstract

科学・工学に現れる実際問題の多くは、最小二乗問題に帰着する。

測地・制御・信号処理・統計・画像処理・物理モデリング

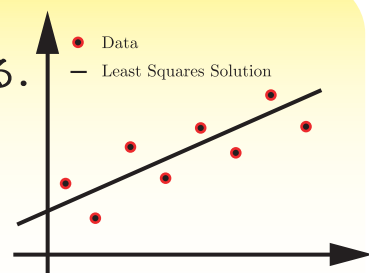
といった場面が挙げられる。

問題が大規模で悪条件の場合も有効な、

安定・高速な効率の良いアルゴリズムを提案する。

本手法は内部反復による前処理を用いたクリロフ部分空間法に基づいている。

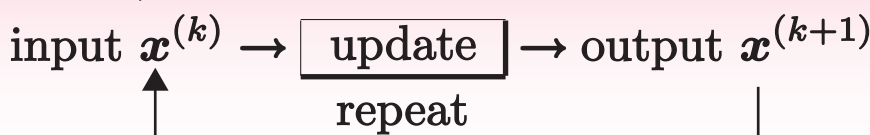
手法の有効性を数値実験により明らかにする。



#### 手法 Method

クリロフ部分空間法

連立一次方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  に対する反復解法



適当な写像  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  を使って

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{B}\mathbf{z}\|_2, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A\mathbf{B})$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{B}A\mathbf{x}\|_2, \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathbf{B}^T \mathbf{B}A)$$

とすれば、クリロフ部分空間法のひとつ

一般化最小残差 (GMRES) 法を適用できる (Hayami, Yin, and Ito 2007).

# 数値実験 Numerical Experiment

正規分布にしたがって生成されたランダムな行列によるテストケース

劣決定問題  $30000 \times \begin{cases} A \\ x \end{cases} = \begin{cases} b \end{cases}$

非零要素の密度は0.1%

過決定問題  $3000 \times \begin{cases} A \\ x \end{cases} = \begin{cases} b \end{cases}$

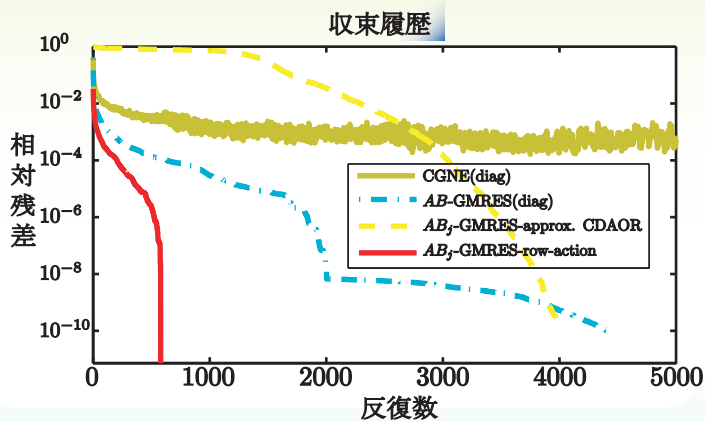


表1: 反復回数と計算時間

problem method -precond.	RANDL1 <sup>T</sup>	RANDL2 <sup>T</sup>	RANDL3 <sup>T</sup>	RANDL4 <sup>T</sup>	RANDL5 <sup>T</sup>	RANDL6 <sup>T</sup>	RANDL7 <sup>T</sup>
CGNE -(diag)	81 0.286	236 0.861	725 1.891	2868 7.292	5506 14.167	13561 33.343	70086 203.89
ABGMRES -NE(diag)	80 0.246	223 0.932	650 4.720	1479 19.698	1613 24.196	1830 33.787	75000 266.021
AB <sub>j</sub> GMRES -Row Action	16(48) 0.128	25(150) 0.370	101(404) 1.089	234(1673) 4.272	470(1410) 5.228	570(1710) 6.857	580(2320) 8.287

first row: outer iteration number(inner iteration number)  
second row: cpu time[sec]

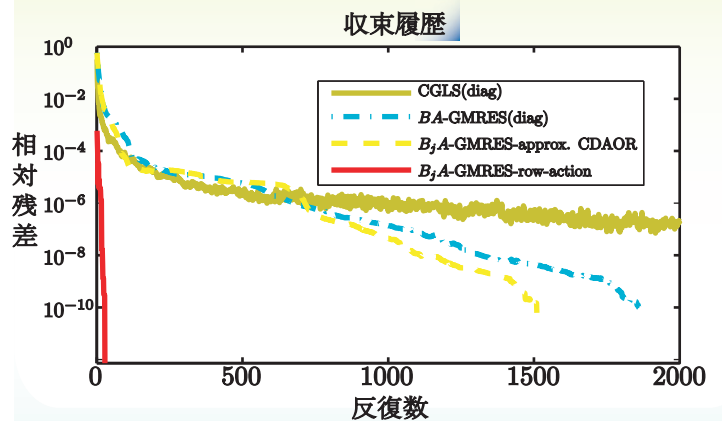


表2: 反復回数と計算時間

problem method -precond.	RANDL1	RANDL2	RANDL3	RANDL4	RANDL5	RANDL6	RANDL7
CGLS -(diag)	80 0.296	228 0.313	688 1.501	2816 6.131	5485 15.496	13471 28.609	68148 175.472
B <sub>j</sub> ACMRES -(diag)	84 0.237	214 0.781	808 3.858	1487 17.791	1615 21.365	1487 20.838	1917 33.416
B <sub>j</sub> AGMRES -Approx. CDAOR	70(70) 0.394	189(189) 1.212	583(583) 5.562	1198(1198) 17.034	1326(1326) 19.781	1505(1505) 24.232	>4000 -
B <sub>j</sub> ACMRES -Row Action	7(7) 0.068	14(14) 0.128	15(15) 0.136	35(35) 0.313	38(38) 0.340	19(19) 0.172	41(41) 0.366

first row: outer iteration number(inner iteration number)  
second row: cpu time[sec]