地図の塗りわけ
4色定理とその応用

Map Coloring and the Four Color Theorem

河原林 健一
Keni-ichi Kawarabayashi

どんな研究？

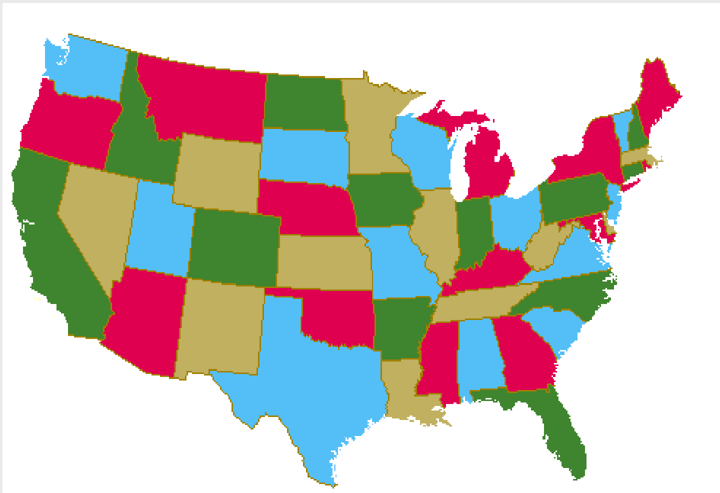
地図の塗りわけは、1850年代より研究されたトピックで、現在では、携帯電話における周波数割り当て問題や、スケジューリング問題に応用されている。元の問題は、どんな地図も、隣接する国同士が同じ色にならないようには、何色必要か？というものである。本研究はこの問題の応用を考える。

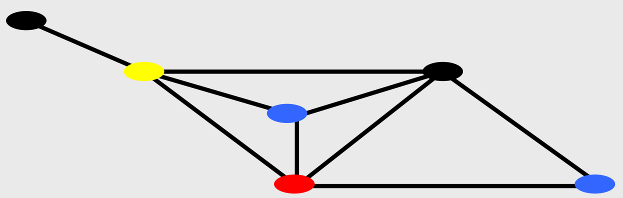
４色問題の歴史

1852年に、Francis Guthrieが、イギリスのマップを製作中に、4色で十分であることに気づいた。この事実をDeMorgan, Cayleyらの有名数学者が学会に提出したことにより、一気に予想として認知された。この問題は、1976年にAppel、Hakenに証明されるまでの実に、124年間もの間の未解決問題だった。

4色定理、その後

地図の塗りわけは、グラフの彩色問題に帰着することができる。たとえば、右の図は、アメリカの州の塗りわけであるが、それぞれの州都同士を隣接していれば結ぶ、という作業をすると、グラフが出来上がる。グラフとは、頂点と辺からなる。またグラフの彩色とは、頂点を、隣接点同士が違う色になるように彩色することである。（下図参照）よって、右図は、アメリカ州都とその隣接関係から出来上がるグラフの彩色問題といえる。



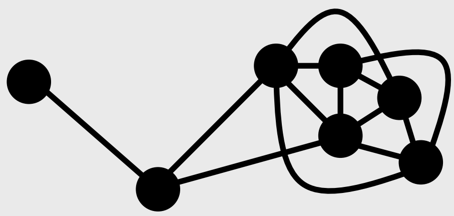


４色定理とは、平面に描くことができるグラフなら、４彩色可能であるという定理で、１２０年以上のみ解決問題であった。また、証明もコンピューターを使ったことで知られている。現在の最先端の研究は、４色問題の拡張と、彩色問題の応用（実用面を含む。）にある。

彩色問題の応用

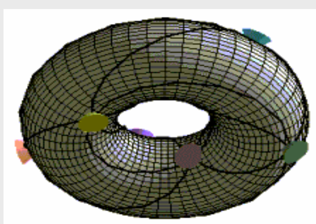
１．周波数割り当て

携帯電話の使用中は、それぞれ固有の周波数を使っている。電話会社は、混線しないように、それぞれの携帯電話に周波数を割り当てなければならない。同じ周波数を使った場合、アンテナの距離が近すぎると混線する恐れがある。どのくらいの数の周波数が必要か？というのが問題である。右図で点はアンテナの位置、辺は混線する可能性があれば、結んである。このグラフでの彩色数が、必要な周波数の数となる。



２．曲面上のグラフ

現代社会では、平面だけでなく、「穴」のあいた図や物を扱うことも多い。曲面上の彩色問題は、４色定理の「拡張」という数学的要請からも、多くの研究者に研究されてきた。右図は、もっとも基本的な曲面、トーラスである（ドーナツ型）。トーラス上のグラフは７色で彩色可能である。実は、ほとんどのトーラス上のグラフは５彩色可能である。



NII 連絡先：河原林　健一（Ken-ichi Kawarabayashi）／ 国立情報学研究所　情報学プリンシプル研究系　助教授
TEL : 03-4212-2555　　FAX : 03-4212-2555　　Email : k_keniti@nii.ac.jp

Map Coloring and The Four Color Theorem

Ken-ichi Kawarabayashi

National Institute of Infromatics

What is Problem ?

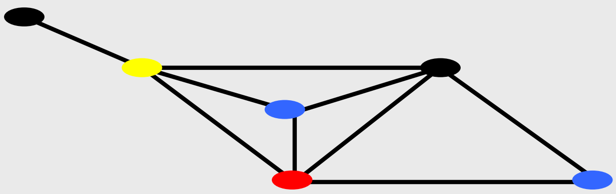
The Four Color Theorem says that any map can be colored using four colors in such a way that adjacent regions (i.e. those sharing a common boundary segment, not just a point) receive different colors. We shall discuss applications of Map Coloring, the Four Color Theorem and Graph Coloring.

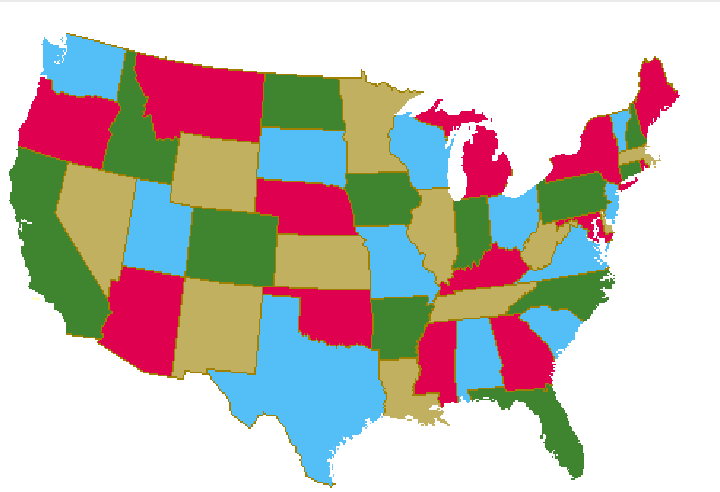
History of 4CT

The Four Color Problem dates back to 1852 when Francis Guthrie, while trying to color the map of counties of England, noticed that four colors sufficed. Then this problem had been known for many famous mathematicians, including DeMorgan, Caley. It was open until 1976. It was finally proved by Appel and Haken using Computers !

Graph Coloring

We may view "Map Coloring" as "Graph Coloring". If you look at US map coloring (See the right picture), you may think of "graph" such that its vertex set is capital of each state, and edge is in if and only if two states are adjacent. Here, graph consists of vertices and edges. Graph coloring means a vertex coloring such that all adjacent vertices receive different colors. Note that US map can be written as a graph in the plane such that no edges have cross. Such a graph is called "planar graph". So the 4CT is equivalent to say that every planar graph is 4-colorable. Below is a planar graph with coloring.



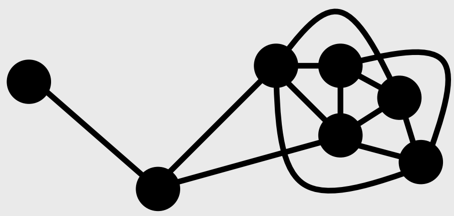


The proof of the 4CT uses computers. Right now, graph coloring is one of center topics in Mathematics and Computer Science. It is also used for some practical applications. The 4CT and graph coloring now create rich theory and million of applications.

Applications of Graph Coloring

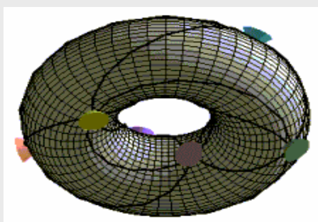
1. Channel Assignment Problem

People are now using cellular phone a lot. But in order to use, we need to assign channel to each cellular phone. The problem is that if you assign same channel to two different cellular phones, it may be confused. This would happen only if these two cellular phones are "close". How many channels are necessary ? Here, we draw a graph as the right picture. The vertex set is each base point, and edge is in if and only if there is a danger for confusion. Then the problem is equivalent to the following; How many colors are necessary for this graph ??



2. Coloring Graph on Surfaces

It would be convenient if we could just consider graphs on plane. But for our applications, or even in practice, we need to deal with graphs on surface. The right picture shows a graph on torus. Torus is known to be "Doughnut". The question is; how many colors are necessary for graphs on the torus ? The answer is "7". But we know more. Almost all graphs on torus need at most 5 colors !



NII

Ken-ichi Kawarabayashi, Email: k_keniti@nii.ac.jp Tel +81 - 3- 4212 - 2555 Fax +81 - 4212 - 2555