

Amazon.co.jpのランキングのモデルとロング テールの分析

服部哲弥 (東北大学・理)

服部久美子 (首都大学東京・数学)

2008.09.02 研究集会「紀要の電子化と周辺の話題」(京大数理研)

1 . Amazon.co.jpのランキング

The screenshot shows the Amazon.co.jp product page for the book '統計と確率の基礎 (単行本)' by 服部 哲弥. The page is viewed in Internet Explorer. The search bar at the top contains the text '和書'. The product title is '統計と確率の基礎 (単行本)' with the author '服部 哲弥 (著)'. It has a 5-star rating and 2 customer reviews. The price is ¥2,100 (including tax), and it is noted that the item is in stock and shipping is free for orders over 1500 yen. The page also lists the publisher (Academic Press), ISBN numbers, release date, and dimensions. At the bottom, it shows the Amazon.co.jp logo and a link to the home page.

Amazon.co.jp: 統計と確率の基礎: 服部 哲弥: 本 - Windows Internet Explorer
http://www.amazon.co.jp/NE7KB5NB1KE8KA8N88NE3NB1KA8ME7KA2KBANE7X8EK87NE3NB1KAEKE5X9FX
amazon.co.jp
検索 和書 GO
和書 詳細検索 ジャンル 新刊・予約 ベストセラー ハリー・ポッター 雑誌
統計と確率の基礎 (単行本)
服部 哲弥 (著)
★★★★☆ (2件のカスタマーレビュー)
価格: ¥ 2,100 (税込) この商品は1500円以上国内配送料無料を利用して配送されます。
在庫状況(詳しくはこちら): 在庫あり。この商品は、Amazon.co.jp が販売、発送します。
1点在庫あり。ご注文はお早めこ。
出版社: 学術図書出版社; 第2版 (2006/11/10)
ISBN-10: 4873618428
ISBN-13: 978-4873618425
発売日: 2006/11/10
商品の寸法: 21 x 14.8 x 1.6 cm
おすすめ度: ★★★★★ (2件のカスタマーレビュー)
Amazon.co.jp ランキング: 本で159,509位
amazon.co.jp® Amazon.co.jp ホーム

Amazon.co.jp

本のページ中程やや下
Amazon.co.jp ランキング

「Amazonの謎順位。」

‘Internet retailers are extremely hesitant about releasing specific sales data’

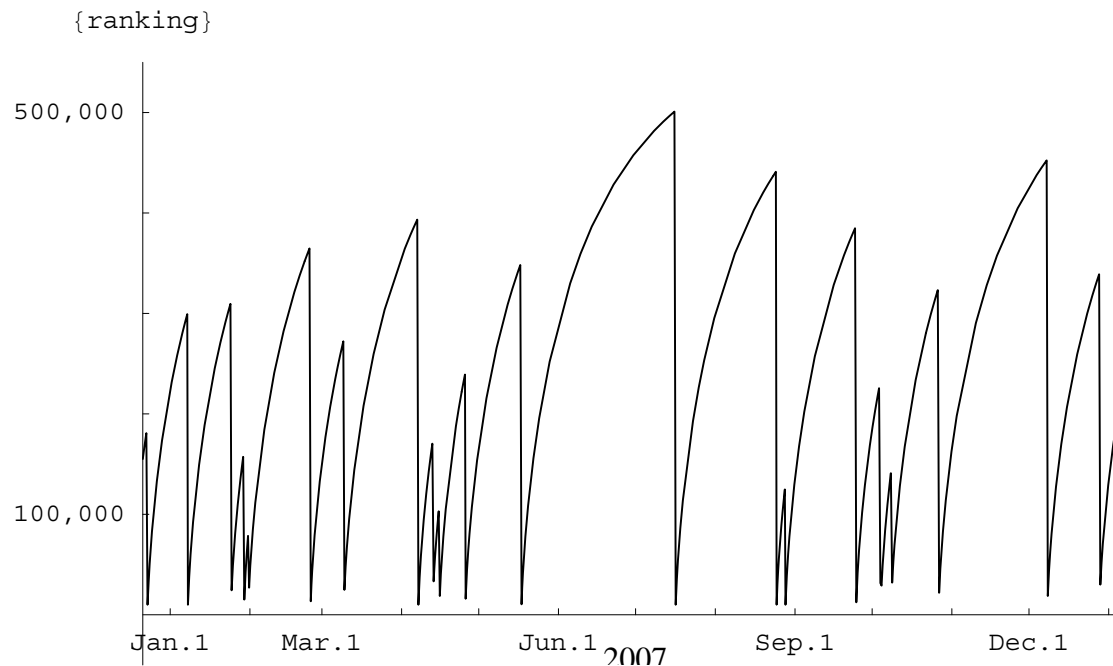
ランキングの時間変化

- ・ 本を書くと，自分の本の順位が気になる．

Amazon.co.jp ランキング: 本で373,406位

(1時間後) Amazon.co.jp ランキング: 本で373,977位

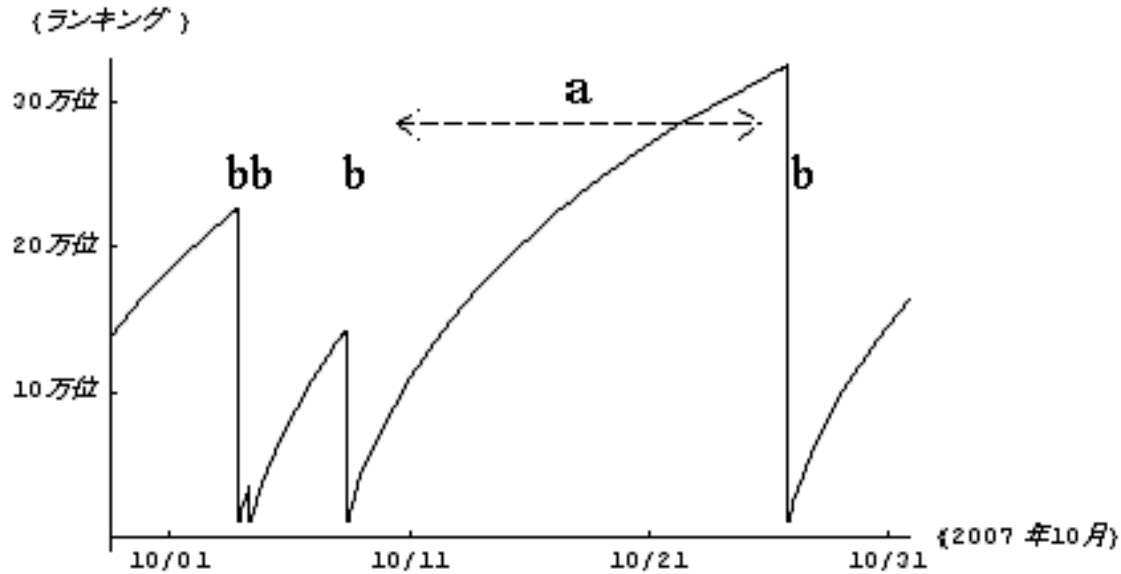
(2時間後) Amazon.co.jp ランキング: 本で374,693位



- ・ Amazon.co.jp のランキング（順位）変化はワイルド，ランダム

ランキングの時間変化のモデル化

- できるだけ単純化したモデルで本質を理解したい



- Stochastic ranking process
 - a. 売れない間は他の本が売れて追い越すたびに順位が下がる
 - b. 売れると即座に1位

Stochastic ranking process

- a. 売れない間は他の本が売れて追い越すたびに順位が下がる
- b. 売れると即座に1位

- これだけで「Amazon 謎順位」が説明できる
- Amazon.co.jp ランキングの時間変化は定量的な情報を持つ

今日の話: Stochastic ranking process は、特にロングテール (極めて多数のそれぞれは少ししか売れない本たち) について、

- 定量的分析に有効 (確率モデルの多粒子極限 偏微分方程式)

Pareto 指数の決定 (「Amazon.co.jp はロングテールビジネスか?」に答えられる)

ランキング下位の売り上げへの寄与の計算が可能 (マネージメント; 短時間で決断したときの損失評価)

- 単純だが自然な順位付け (個別のランダムと全体の決定論)

* . 目次

- 1 . Amazon.co.jp のランキング
- * . 目次 今 , ココ
- 2 . Stochastic ranking process
- 3 . データへの当てはめとロングテール分析
- 4 . まとめ

2 . Stochastic ranking process

N 個の粒子の列の順序 (順位, ランキング) 変化の確率モデル

• 定数:

$x_{1,0}^{(N)}, \dots, x_{N,0}^{(N)}$; $1, 2, \dots, N$ の並べ替え (順位の初期値)

$w_1^{(N)}, \dots, w_N^{(N)}$; 非負 (1位へのjump率 = 本の注文頻度, ...)

• 確率変数:

$X_1^{(N)}(t), \dots, X_N^{(N)}(t)$ (時刻 t での各粒子の順位)

[規則 0] $X_i^{(N)}(0) = x_{i,0}^{(N)}$ ($\forall i$)

$\tau_{i,j}^{(N)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots$;

(粒子 i が j 回目に1位にjumpする時刻)

j について増加

$\tau_{i,j+1}^{(N)} - \tau_{i,j}^{(N)}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ ($\tau_{i,0}^{(N)} = 0$) は i, j について独立, j について同分布

で指数分布 $P[\tau_{i,1}^{(N)} \leq t] = 1 - e^{-w_i^{(N)}t}$

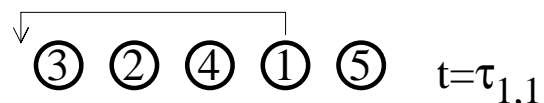
時間発展の規則

[規則 1] $X_i^{(N)}(\tau_{i,j}^{(N)}) = 1 \quad (\forall i, j)$

[規則 2] $X_i^{(N)}(\tau_{i',j'}^{(N)}) = X_i^{(N)}(\tau_{i',j'}^{(N)} - 0) + 1 \quad (\forall i, i', j')$

(各粒子は自分より下位の粒子がjumpするごとに順位を1下げる

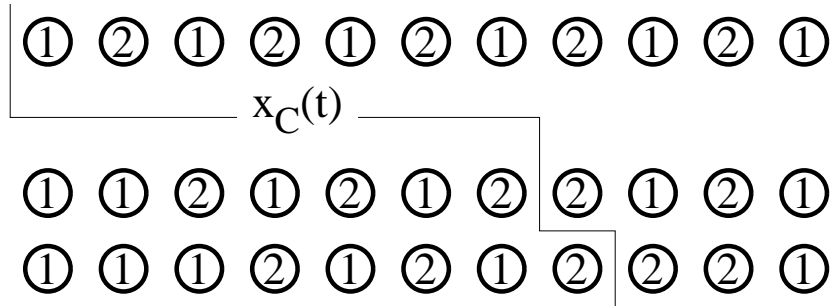
= jump 以外では列の相対順序保存)



$\tau_{1,1} < \tau_{2,1} < \tau_{1,2} < \tau_{3,1} < \dots$ なるサンプル

$x_C(t)$: jump 済み粒子と未jump 粒子の境界

$x_C(t)$: jump 済み粒子と未jump 粒子の境界



$$x_C^{(N)}(t) = 1 + \sum_{i=1}^N \chi_{\tau_i^{(N)} \leq t}$$

(1 位になった時刻を $t = 0$ に取り直すと ,)

$X_C^{(N)}(t)$ = 1 位になった粒子のその後の軌道

$x_C(t)$ の大数の法則

ランダムなモデル $\Rightarrow N$ が大きいとき決定論的な運動 (大数の法則)

Jump 率の分布 $\lambda^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{w_i^{(N)}}$ が $N \rightarrow \infty$ で λ に弱収束するならばス

ケールした軌道 $y_C^{(N)}(t) = \frac{1}{N} (x_C^{(N)}(t) - 1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\tau_i^{(N)} \leq t}$ は

$y_C(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-wt} \lambda(dw)$ に弱収束する .

$y_C(t)$ は実際に観測される !

データへの当てはめには jump 率 (= 販売頻度) の分布 λ が必要 (後述)

経験分布の収束

仮定 . 初期配位 $y_{i,0}^{(N)} = \frac{1}{N} (x_{i,0}^{(N)} - 1)$ の分布が $N \rightarrow \infty$ で収束 :

$$\mu_{y,0}^{(N)}(dw dy) = \frac{1}{N} \sum_i \delta_{w_i^{(N)}}(dw) \otimes \delta_{y_{i,0}^{(N)}}(dy) \rightarrow \mu_{y,0}(dw) \times dy \quad (N \rightarrow \infty)$$

定理 : Jump 率と相対順位 $Y_i^{(N)} = \frac{1}{N} (X_i^{(N)} - 1)$ の結合経験分布 (分布値確率変数列) $\mu_{y,t}^{(N)} := \frac{1}{N} \sum_i \delta_{w_i^{(N)}} \otimes \delta_{Y_i^{(N)}(t)}$ は $N \rightarrow \infty$ で (非ランダムな) 結合分布 $\mu_{y,t}(dw) \times dy$ に確率収束する

極限 $\mu_{y,t}(dw)$ はあらわに分かる

偏微分方程式の解

極限を記述する偏微分方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}(y, t) + \sum_j f_j U_j(y, t) \frac{\partial U_i}{\partial y}(y, t) = -f_i U_i(y, t) \quad (y, t) \in [0, 1) \times [0, \infty)$$

1次元非圧縮性混合流体の蒸発による運動, Burgers型方程式

定数: $f_i \geq 0$ (第*i*種流体の蒸発率)

未知関数: $U_i(y, t)$ (時刻*t*に*y*より右にある第*i*種流体の量)

初期値: $U_i(y, 0) \geq 0$, smooth, $\searrow, \sum_j f_j U_j(0, 0) < \infty$,

$\sum_j U_j(y, 0) = 1 - y$ (Burgers型システムで衝撃波の無い初期値)

境界条件: $U_i(0, t) = U_i(0, 0), t \geq 0$ (定常)

解が唯一存在 (特性曲線であらわに解ける非線形システムの例題)

特性曲線 $\frac{dy_B}{dt}(t) = v(y_B(t), t); v(y, t) = \sum_j f_j U_j(y, t), y_B(0) = y_0$

以上はjump率が離散分布の場合: $\mu_{y,t}(\{f_i\}) = -\frac{\partial U_i}{\partial y}(y, t)$

極限を記述する偏微分方程式(一般のjump率分布)

$$\frac{\partial U}{\partial t}(dw; y, t) + \int w' U(dw'; y, t) \frac{\partial U}{\partial y}(dw; y, t) = -wU(dw; y, t),$$

$$(y, t) \in [0, 1) \times [0, \infty)$$

初期値: $U(dw; y, 0) \geq 0$ smooth, 非増加 in y , $\int wU(dw; 0, 0) < \infty$,
 $U(\mathbb{R}_+; y, 0) = 1 - y$ (Burgers型のシステムで衝撃波の起きない初期値)

境界条件: $U(dw; 0, t) = U(dw; 0, 0)$, $t \geq 0$ (定常)

解が唯一存在(特性曲線であらわに解ける非線形システムの例題)

$$\mu_{y,t}(dw) = -\frac{\partial U}{\partial y}(dw; y, t)$$

定理の意味

- ・ 順位の先頭付近はjump率の高い粒子が多く tailは低い粒子が多い
 - ・ ランダムな現象が N が大きいとき決定論的運動に近い
(Amazon.co.jp の本は百万冊の程度だから十分適用可能)
- 確率モデル： 売れる本・売れない本の順位分布を追うのに全ての注文記録が必要
- PDEの解： 初期配置があれば個別の注文記録は不要
- ・ 従属確率変数の大数の法則，空間分布の経験分布の収束
(右側の粒子が飛んだときだけ位置がずれる)

3 . データへの当てはめとロングテール分析

粒子の軌道（本の順位），最後に売れた時刻を $t = 0$ と取り直す

$$x_C(t) \simeq Ny_C(t) = N - N \int_0^\infty e^{-wt} \lambda(dw)$$

実際のデータに当てはめるためには，Jump率の分布 λ が必要
社会学や経済学では Pareto 分布が使われることが多い

Jump率の分布がPareto分布のとき

Pareto分布： $w_i = a \left(\frac{N}{i}\right)^{1/b}$, $i = 1, \dots, N$, $a, b > 0$ は定数

例： w_i は i 番目の金持ちの年収 「80-20の法則」

a : 最低収入 (最高収入 = $aN^{1/b}$)

指数 b : b 小 \Leftrightarrow 不平等, b 大 \Leftrightarrow 平等

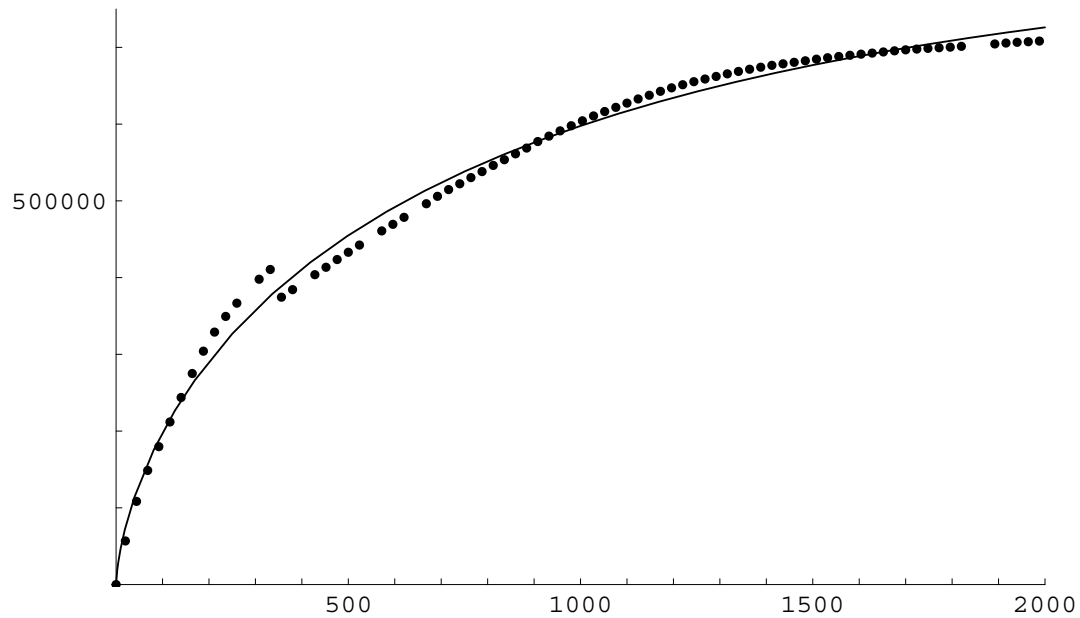
$$x_C(t) \simeq N y_C(t) \simeq N(1 - b(at)^b \Gamma(-b, at))$$

(Γ : 不完全ガンマ関数)

N, a, b を与えれば決まる!

ランキングデータへの当てはめ

2000時間(80日)超のデータ ($n_d - 1 = 77$)



$$N^* = 90 \text{ 万}$$

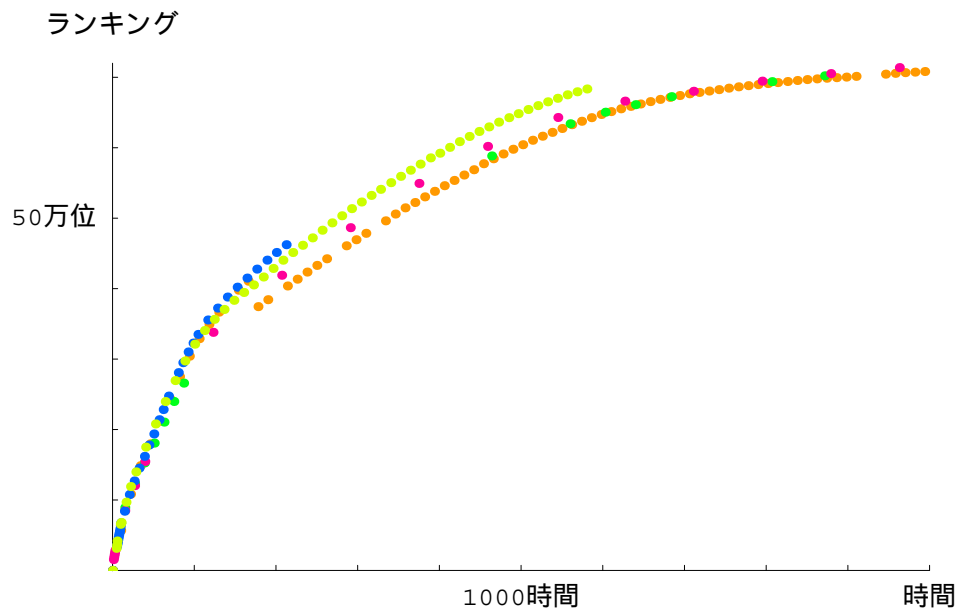
$$a^* = 4 \times 10^{-4}$$

$$(1/a^* = 3.5 \text{ ヶ月})$$

$$b^* = 0.6312$$

$$(\sqrt{\chi^2/n_d} = 1 \text{ 万})$$

再現性



概ね良いが、長期に関してはトレンドが無視できないように見える。短期に関しては日変化（午前午後）の波も無視できないようだ（今後の問題）

先行研究との比較

先行の経済学的研究

(選んだ本の期間あたりの平均販売量を多数の本にわたってとる方法)

Chevalier – Goolsbee $b = 1.2$

Online bookstore が brick-and-mortar bookstore より価格弾力性が高く，CPIへの影響大

Brynjolfsson – Hu – Smith $b = 1.148$

J. A. Hausman (1997) の消費厚生 (consumer welfare) 評価方法：Long tail領域の書籍の購入が可能になったことを値段が需要0の高値から下がったと計算（価格弾力性はinput）

これらの b の値は我々の方法 + 実測値とは矛盾

Online retailの経済効果は先行主張ほど強くない？

少なくともAmazon.co.jpについては，ロングテールの経済効果は小さい（後述）

テールからの売り上げへの寄与の評価

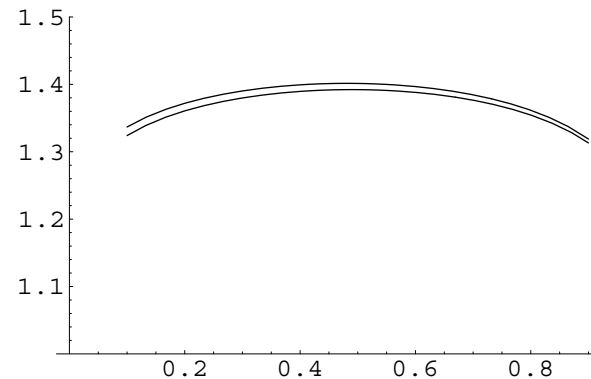
・ ここまで特性曲線 $y_C(t)$ の応用 - $\mu(dw; y, t)$ の応用？
 引き続き, λ は Pareto 分布, 単価は等しいと仮定. $0 < r < 1$ に対して
 定常に達した後のランキングの下位 (上位 r を除いた残り) からの総売上への寄与:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(r, 1) &\simeq N \int_{(w,z) \in [0, \infty) \times [r, 1]} w \mu_{z,t}(dw) dz \\ &= Nab \Gamma(1 - b, q(r)) q(r)^{b-1} \\ ; q(r) &= at_1(r), r = 1 - e^{-q(r)} + q(r)^b \Gamma(1 - b, q(r)) \end{aligned}$$

cf. 真の売れ行き w_i を知っていてその順に並べた場合の下位 $1 - r$ からの寄与

$$S(r, 1) \simeq N \frac{ab}{b-1} (1 - r^{(b-1)/b})$$

右図: $\frac{\tilde{S}(r, 1)}{S(r, 1)}$ ($b = 1.15, 1.2$)
 (ランキングの下位を切って捨てたときの損失が正確な売り上げ順位に従って切った場合の最大 1.4 倍程度)



指数 b とロングテール

b 小 \Leftrightarrow 不平等, b 大 \Leftrightarrow 平等 = ロングテール もう少し定量的に

$b > 1$: $S_{tot} = S(0, 1) \simeq \frac{Nab}{b-1}$ 収束

極端な例 $b = 2$: $\frac{S(0, 0.2)}{S_{tot}} \simeq \sqrt{0.2} \simeq 0.447$

テールは売り上げの半分を占める (20-80 の法則からの大きな逸脱)
現実的な数字 20-80 の法則に近い:

$b = 1.2$ (Chevalier, Goolsbee) $\frac{S(0.2, 1)}{S_{tot}} \simeq 0.235$,

$b = 1.15$ (Brynjolfsson, Hu, Smith) $\frac{S(0.2, 1)}{S_{tot}} \simeq 0.189$

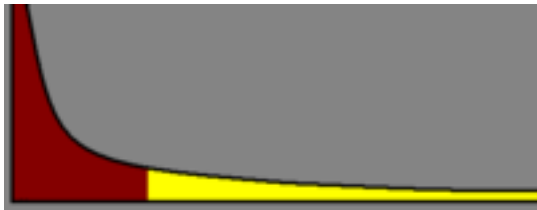
しかし, N 自体が大きい状況なので無視はできない **ロングテールビジネス**

$b < 1$: $S(r, 1) \simeq \frac{Nab}{b-1}(1 - r^{(b-1)/b})$: $r = 0$ で発散

ヒット商品が効く . **ロングテールビジネス不成立**

Amazon.co.jp の観測結果 : $b^* = 0.6312 < 1$

Amazon.co.jpはロングテールビジネスか？



C. Anderson, 'The Long tail'

Amazon.co.jp: $b^* = 0.6312 < 1$

インターネットを生かしたロングテール型のリテールの草分けとして有名なAmazon書店は、ロングテールビジネスでは無い

Amazonはロングテールの「成功例」として記事や解説や論文に登場することで宣伝費無料の大規模宣伝を勝ち取り、実際にはハリー・ポッターの予約販売（旧態依然の大ヒットビジネス）で利益を上げている、と思われる。

傍証： Amazonが売上げ詳細を隠すと言われている...

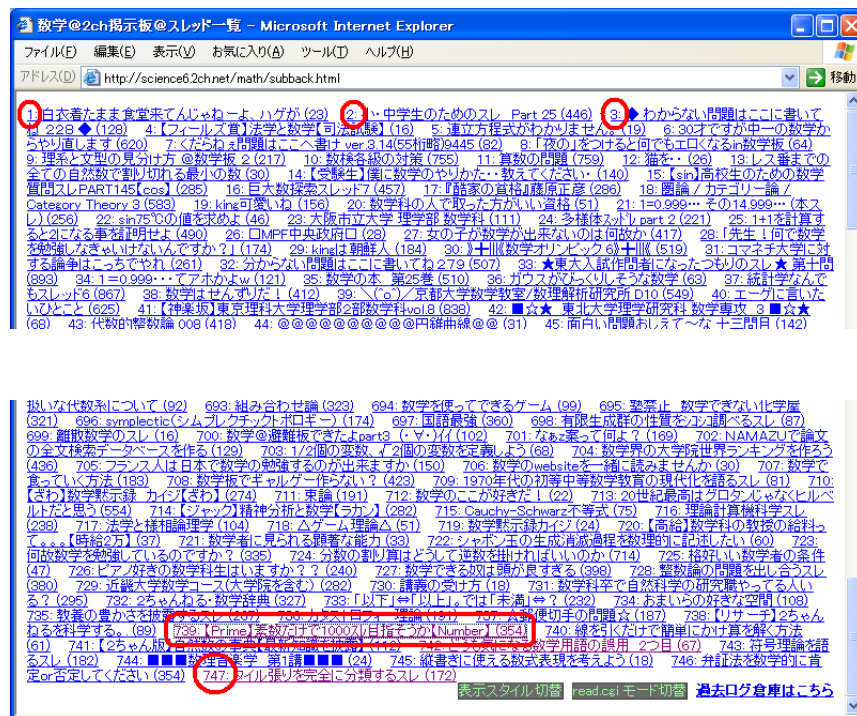
おまけ . 2ch.net

2チャンネル (2ch.net) :
web 掲示板の巨大な集まり

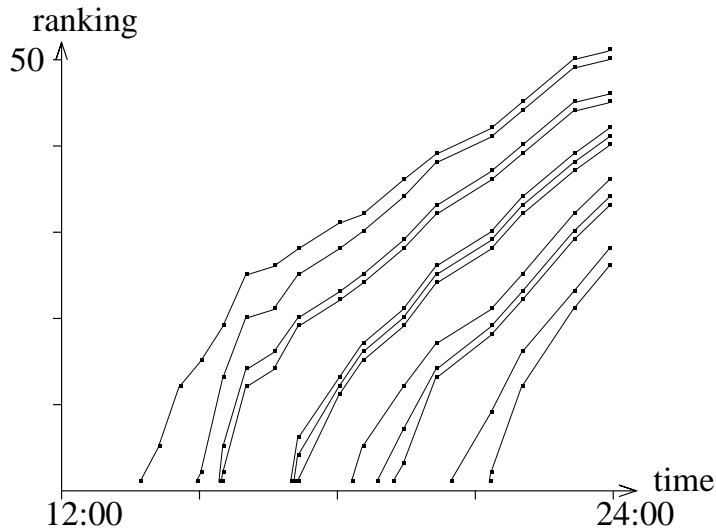
スレッド (ページ) 一覧 :
「書き込んだスレが1位」:

stochastic ranking process

と同じ

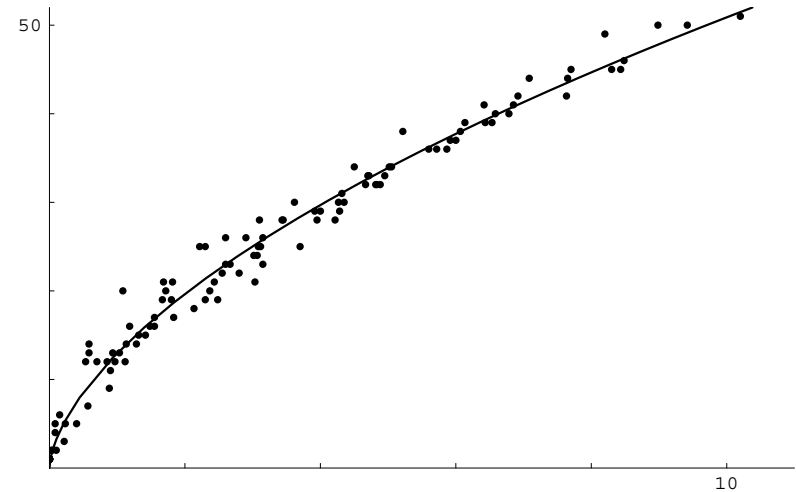


スレー覧の順位変化



某日午後 1 位になった (誰かが書き込んだ) スレのその後の順位の時間変化

(複数回 1 位になったスレについては最後に 1 位になって以降の時間変化)



1 位になった時刻を 0 に取り直して重ねた図

実線：モデルの無限粒子極限から得られる曲線

$N = 795,$

$(a^*, b^*) = (3.3 \times 10^{-4}, 0.62)$

$(1/a^* = \text{約 } 4 \text{ ヶ月})$

ブログの人気度ランキングにも応用可能

4 . まとめ

stochastic ranking process : Amazonl.co.jp ランキング (会社が公表しない, テール側の書籍にとって一見ワイルドな) 「謎の順位」を説明する簡単なモデル

揺らぎの大きい多種類のデータがあるとき, ラプラス逆変換によって, 種類の分布入を揺らぎ無しに決める統計手法 .

- 確率過程論 (stochastic ranking process)
- 偏微分方程式論 (ランダム系から決定論へ)
- 数理統計学 (ラプラス変換を用いたデータ解析)
- 計量経済学 (online retail, long tailの分析)
- 事実の定量的重要性 (一見複雑な現象が, 単純なモデルで (半) 定量的に説明できる . 誤解や無用の複雑な話が出回る前に, 何が数学的に単純かを公にする価値)
- 数学的モデルが刺激になって, 新しいデータが発表されることを期待

応用の可能性

- ・ 情報公開を渉る会社の経営状況を探る
 - ・ ロングテール型オンラインリテールの業績情報公開のための法的規制の方法（安価で単純な仕組みで，ロングテール構造が分かる）
 - ・ 大量の統合されずに蓄積されたデータのデータマイニング。
 - 会社のwebや個人単位のブログのランキング
 - 管理人が管理しきれない掲示板のactivity分析
 - 緊急時の安否などの情報（フォーマットに従う余裕はない）
- 正確な情報や個別具体的な情報は探索の問題だが，統計的な情報（ベストヒットとロングテールの売り上げへの貢献の比，どの地域が情報弱者が多いかなど，ネットへのアクセス頻度分布）は，最小限の構造だけを仮定してすばやく測定したい

課題（例）

時間変化

- ・ マクロな量（総売上，種類数，販売率頻度）のトレンド（新規出版年8万冊）や周期などは（数学的に複雑になるが）データから解析できるはず
- ・ 個別の本のライフサイクル（栄枯盛衰）はノイズが大きいためデータから確実に導出できるとは思えない。
- ・ ライフサイクルがあっても分布 λ が定常ということは可能．その場合，時間変化を考慮しない単純なstochastic ranking processがどれくらい良い近似か？上位と下位のランキングの時間発展のずれなどで検出可能か？

Stochastic ranking process からの示唆(?)

本題は以上でおしまい．以下は余談．

- Stochastic ranking process は応用上，long tail（売れ行きの小さいあまたある品々）の**定量的分析の手段**として有効．
- 判断の材料となる**客観的な統計的手法**を提供するものであって，社会政策や「売れる方法」を提案するものではありませんが...．
- 「めったに売れないあまたある専門書」の価値や「ほとんど引用されない数多くの学術論文」の価値を信じるからこの研究に深入りしたので，可能ならば何かを**示唆**したい...．

ランキングと文化

厳しい現状 .

- ・ **ランキングに敏感な時代の危機感**

NHK クローズアップ現代 (2008年6月4日 No.2592) 「ランキング依存が止まらない～出版不況の裏側～」

- ・ 売り上げランキングをもとに本を選ぶ人や下位の本を返品する書店の例
- ・ 出版点数の急増や出版社倒産などの問題

(本当にリンクしているかは吟味が必要だが...)

‘Citation Statistics’, (2008.6) International Mathematical Union (IMU), ICIAM, IMS

- ・ 「単純・客観的」な citation data の科学研究評価における ‘use and misuse’

出版点数や論文数の増加と構造特区でのタクシー増加

- ・ **大ヒット依存ビジネスモデルからの脱却**

出版業界も研究者社会も 20-10 年前が良すぎたと考えるべき？

C. Anderson (long tail) : 大ヒット無き時代のポップス界

経済効果を考えれば、ランキング上位が重要 . Long tail はヒットが出なくなるときに「堪え忍ぶ」話と見える .

統計量で測れるものと漏れるもの

厳しいから，守るための示唆や提案が必要．

- 出版文化や学術論文の価値とは何か

ほとんど引用されない数多くの学術論文の価値（ impact factorの価値）

めったに売れないあまたある専門書の価値

- 全体と個

少数のヒットが全体を支えているとしても，**どの**少数かは，

- 時間を経ないと分からない（社会が行き詰まっている場合）
- 環境が変われば変わる（遺伝子の多様性の意義）．

「ヒットが無くなったから本屋を潰し大学を潰す」のではなく，できるだけ多くを支えるべき．

ランキングによるヒット集中の弊害を切り崩す

賞を作って隠れた名作を掘り起こそうとすると、受賞作だけがヒットになって終わる皮肉を打破する必要

- ・ 売れないものにも、たまに、**ランダムに光を当てる**ことが重要ではないか？

- ・ Stochastic ranking process

論文を机に積み上げて誰かが引用したら引っ張り出して眺めて一番上にぽんと置く。上から何部目かという順位。

めったに売れない本の順位が乱高下する究極の順位定義。真価は長い時間かけねば分からないから乱高下して当然。**単純・自然かつ客観的な順位！**

- ・ **出版関係者向け提案**：年1度大賞を発表する代わりに、たとえば本屋大賞の得票分ずつ玉を入れた福引きのガラガラを365回まわして順番を決めて、「**今日の1位**」を毎日発表。

文献

K. Hattori, T. Hattori, *Existence of an infinite particle limit of stochastic ranking process*, Stochastic Processes and their Applications (2008), to appear.

K. Hattori, T. Hattori, *Equation of motion for incompressible mixed fluid driven by evaporation and its application to online rankings*, preprint (2007).

K. Hattori, T. Hattori, *Mathematical analysis of long tail economy using stochastic ranking processes*, preprint (2008).

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~hattori/amazonj.htm>

Google 検索キーワード 服部哲弥