

アルゴリズムで世の中を公平に？

ケーキ分けから家事分担まで

ケーキ分け問題



ケーキ分け問題



ケーキ分け問題



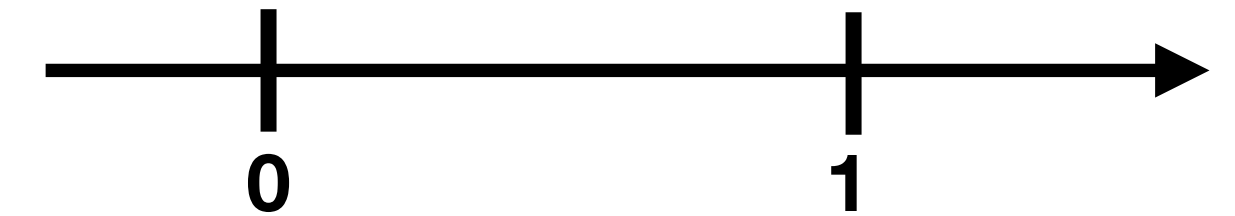
- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]



ケーキ分け問題



- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]

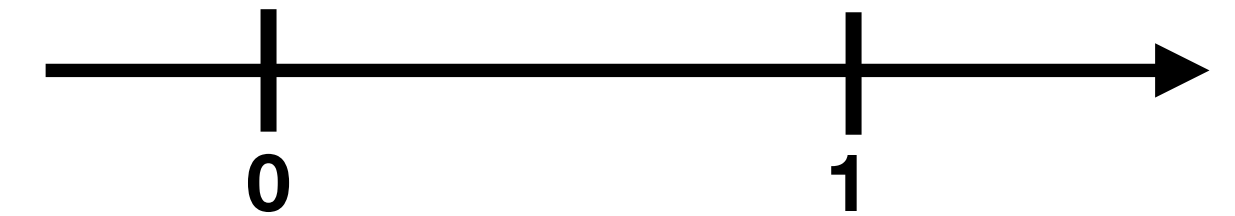


- $[0, 1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]

ケーキ分け問題




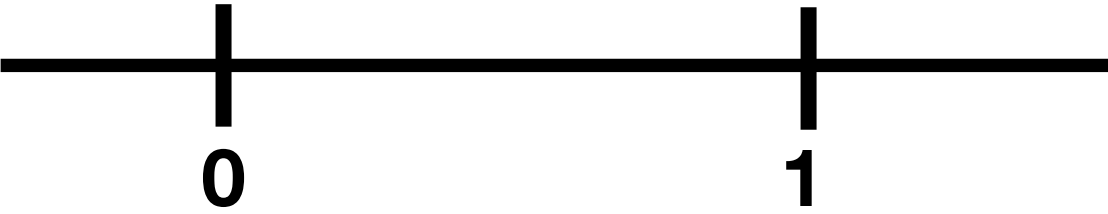
- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]



- $[0, 1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]
- n 人エージェントでの妬みのない配分の存在 [Dubins-Spanier, 1961]

ケーキ分け問題



- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]  
- $[0, 1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]
- n 人エージェントでの妬みのない配分の存在 [Dubins-Spanier, 1961]
- 有界なプロトコル [Aziz-Mackenzie, FOCS 2016]

公平分割理論 (Fair division)

- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析。
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)



公平分割理論 (Fair division)



- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析。
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)
- ウェブサービス
 - Spliddit (<http://www.spliddit.org>) : 財産分与, タクシーの運賃など
 - Course Match: 授業割り当て
 - New York Times Rent Division Calculator: 家賃分担

公平分割理論 (Fair Division Theory)

- 公平な資源配分メカニズムを開発
(例：講義割当, 査読割当, タクシー)
- ウェブサービス



The screenshot shows the Spliddit website with the following content:

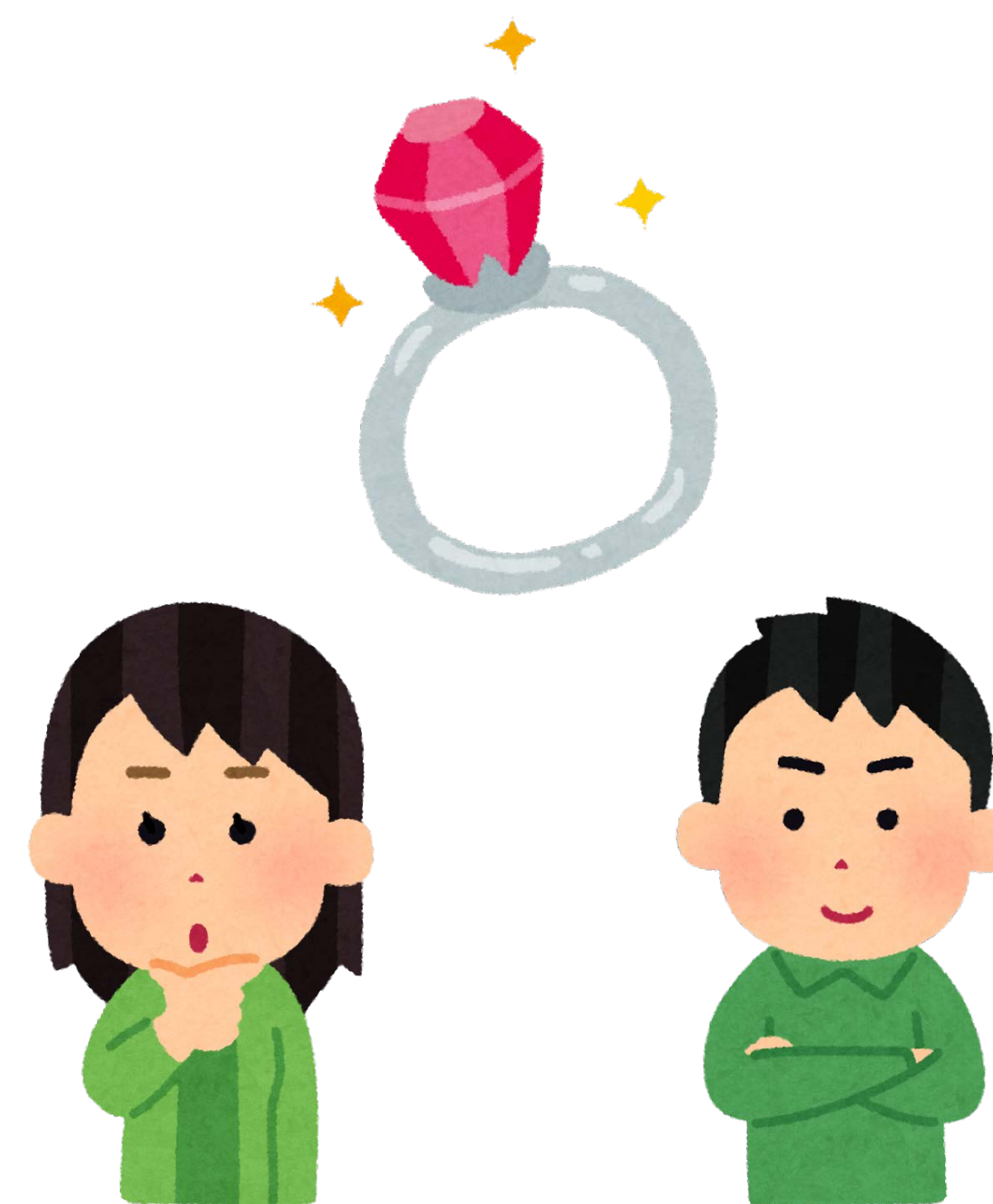
- Header: spliddit | DIVIDE | RENT | FARE | CREDIT | GOODS | TASKS | ABOUT | FEEDBACK
- Section: PROVABLY FAIR SOLUTIONS.
- Text: Spliddit offers quick, free solutions to everyday fair division problems, using methods that provide indisputable fairness guarantees and build on decades of research in economics, mathematics, and computer science.
- Three service cards:
 - Share Rent**: Moving into a new apartment with roommates? Create harmony by fairly assigning rooms and sharing the rent.
 - Split Fare**: Fairly split taxi fare, or the cost of an Uber or Lyft ride, when sharing a ride with friends.
 - Assign Credit**: Determine the contribution of each individual to a school project, academic paper, or business endeavor.
- Buttons: Each card has a green 'START >' button.
- Footer: 検索日: 2021年11月9日

- 2014年にCMUの研究グループが開発した一般向けのサービス
- 開発から1週間で2万人の人がウェブサイトを利用

- Spliddit (<http://www.spliddit.org>) : 財産分与, タクシーの運賃など
- Course Match: 授業割り当て
- New York Times Rent Division Calculator: 家賃分担

公平分割理論 (Fair division)

- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析。
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)
- ケーキは本当にどこでも切れるのか？
 - 離散的なアイテム (indivisible item) の公平配分
 - 公平な配分は存在するとは限らない…
 - 近似的な公平性を達成できるか？



自身の興味や研究としての意義（高校生向け）

興味や経緯

- 高校生のときに、数学が好きで、数学を使って社会に役に立つような分野はないか考えていた。
- 大学で勉強したゲーム理論や数理最適化が非常に面白く感じた。

研究としての意義

- 社会との距離感が非常に近い。
- 身近な問題に対して、数理的に考えることで、物事を整理しやすい。
例えば、家事分担を理論的に考えることができる。

モデル

エージェントの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$



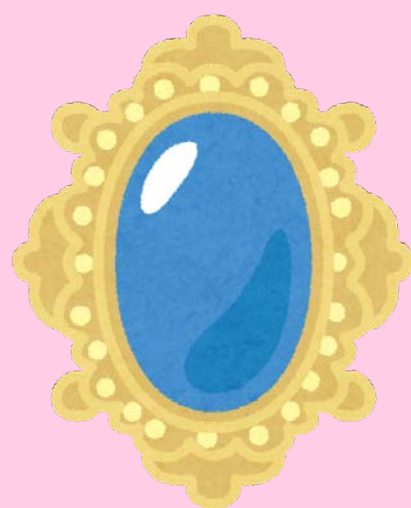
1



2



3

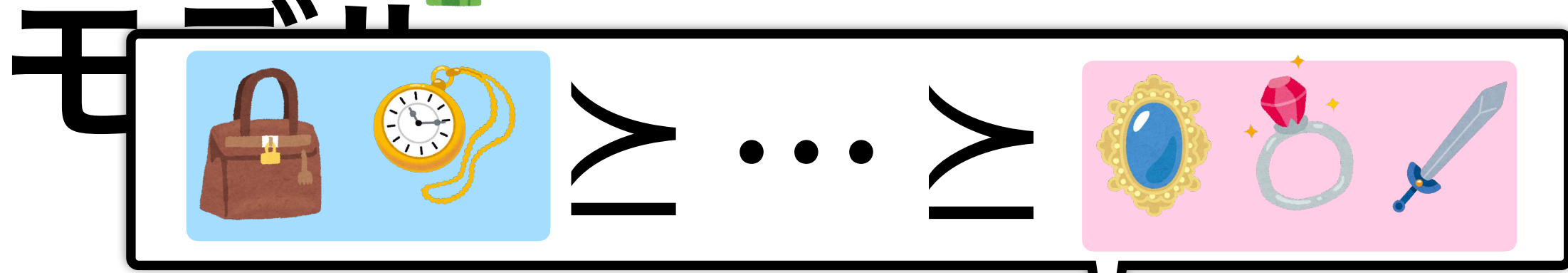


アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

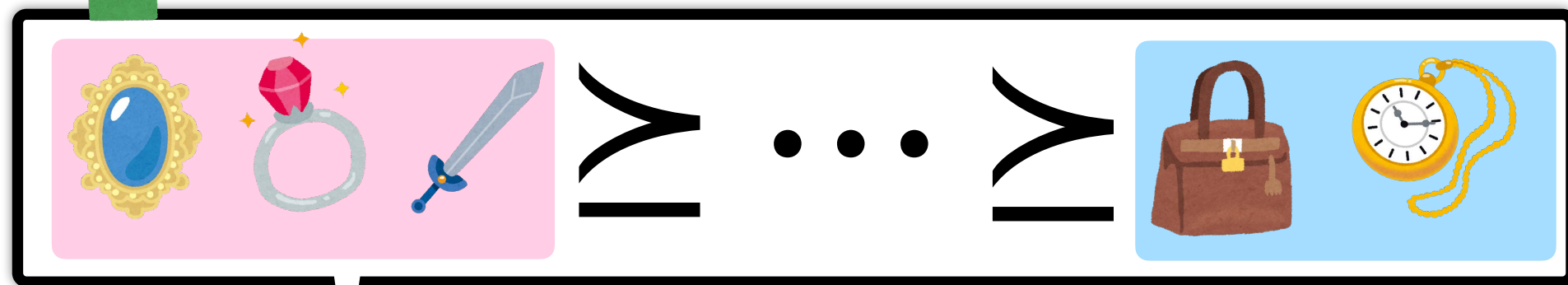
あるアイテムの組合せを
もらったときの嬉しさ



アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

モデル

 の効用関数 $u_2 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

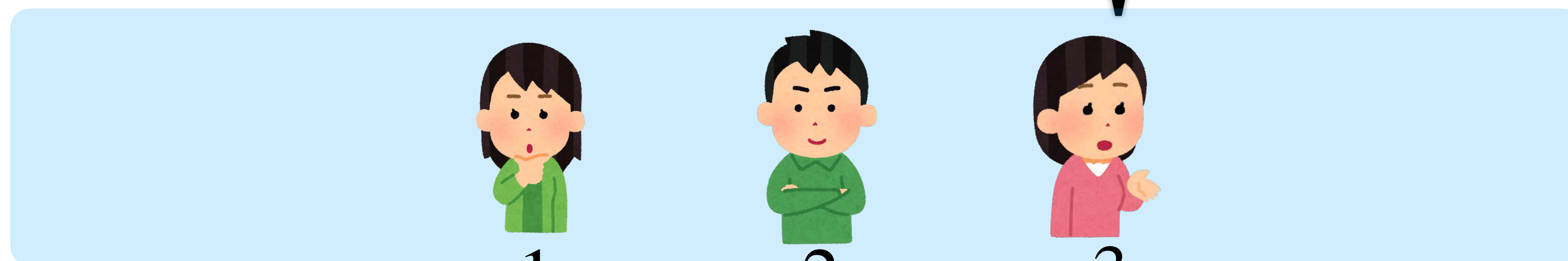
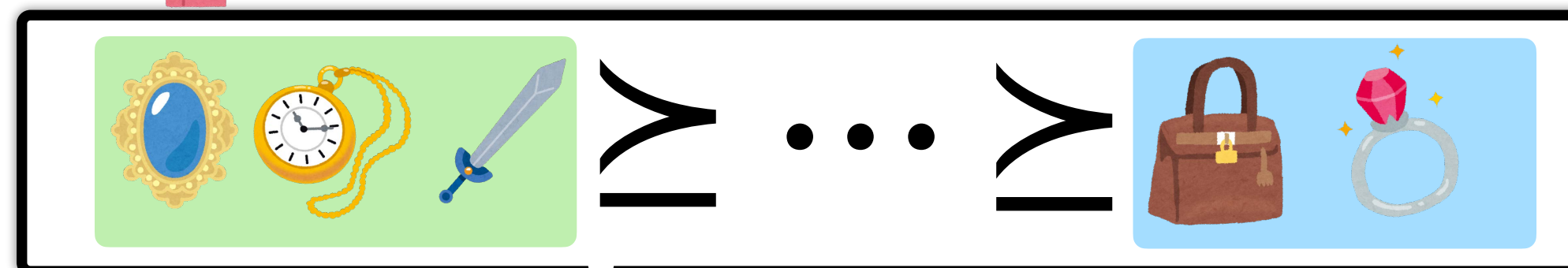


アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

モデル



の効用関数 $u_3 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



1

2

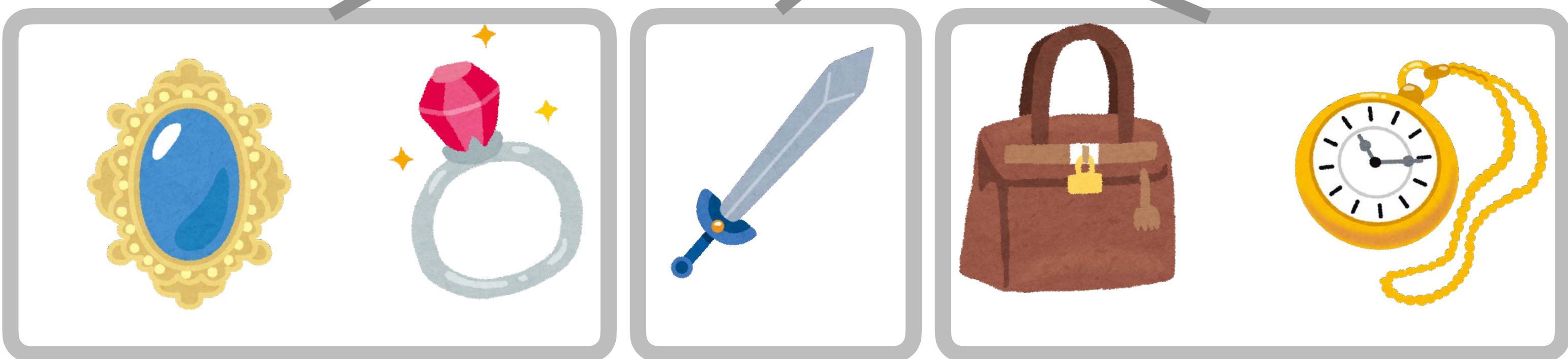
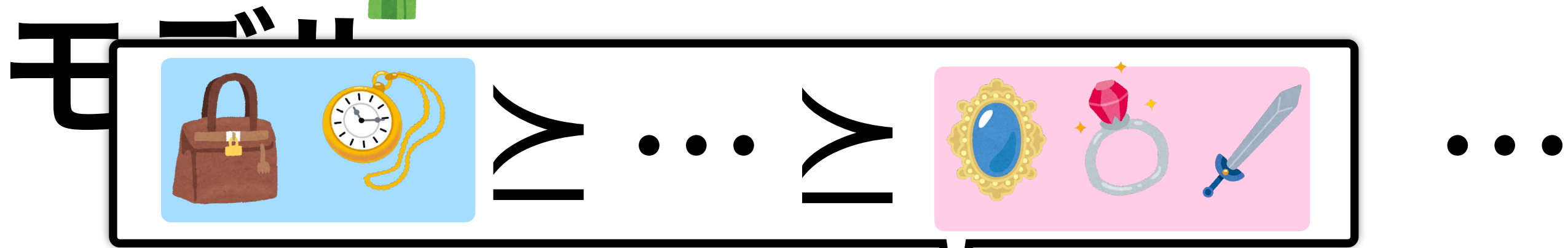
3



アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$



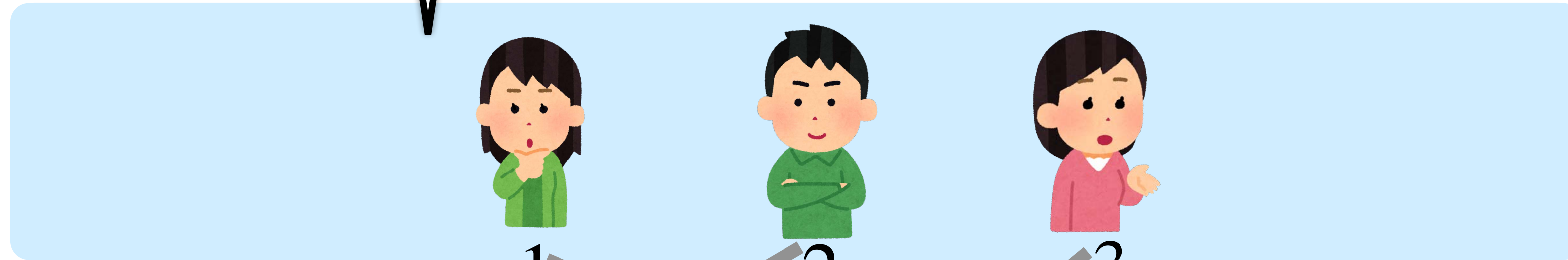
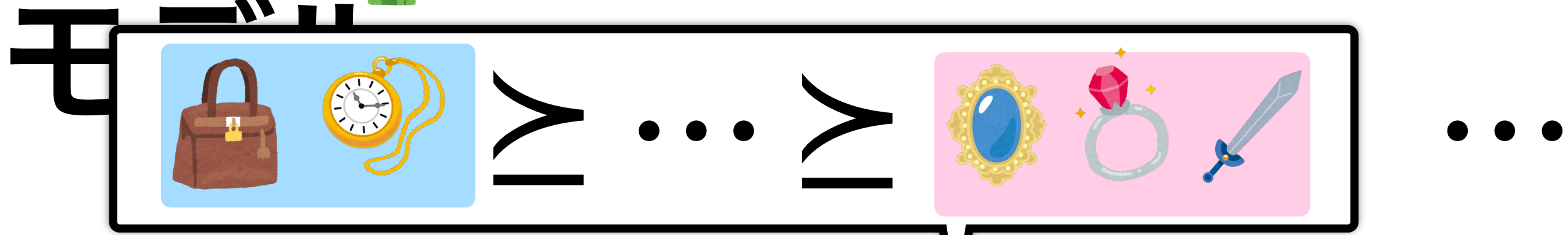
の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



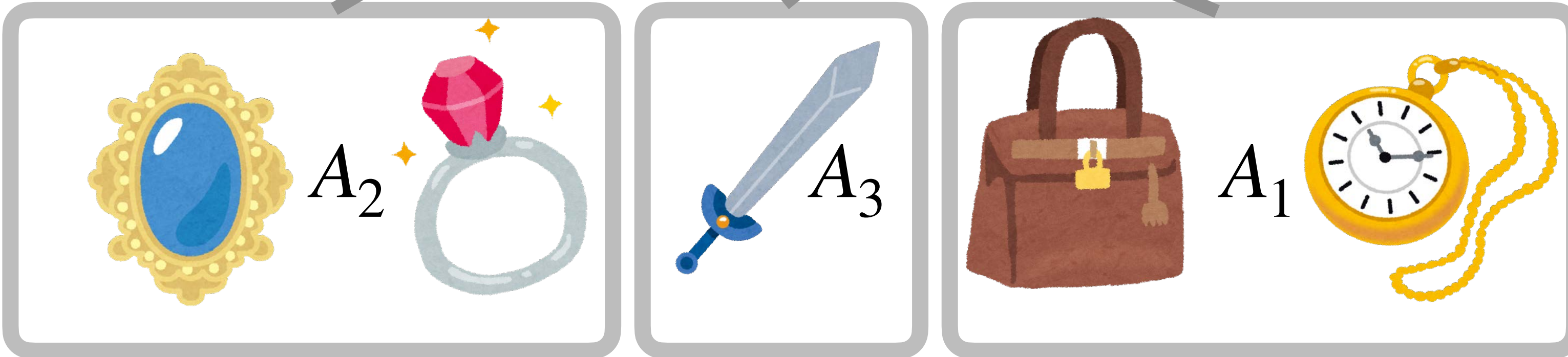
配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ (アイテム集合 V の分割)



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



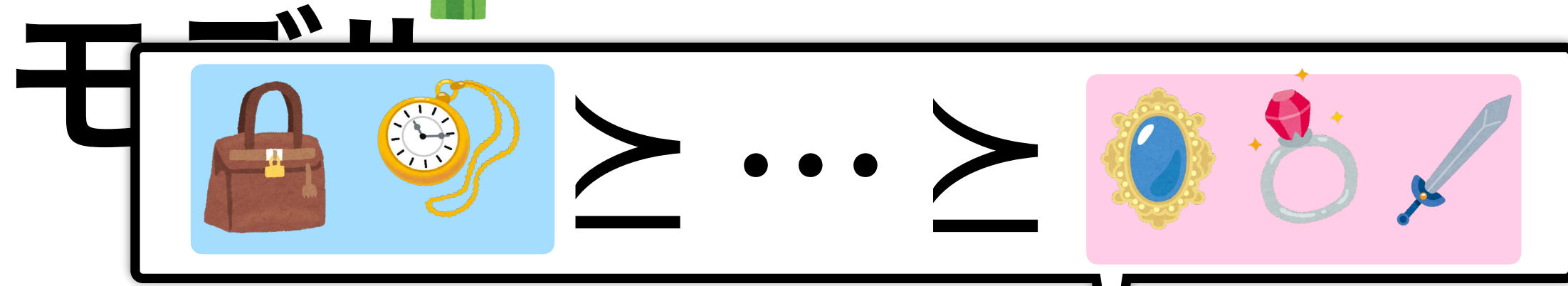
1 2 3



配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ (アイテム集合 V の分割)



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$





加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$






5	1	2	4	10



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$


 $\succeq \dots \succeq$


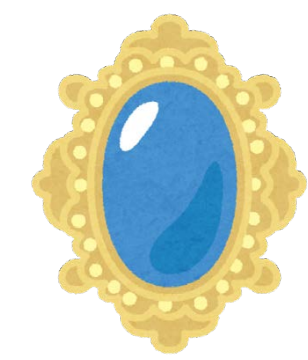








1 2 3

加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$



$u_1(\text{bag, pocket watch}) = 14$






				
5	1	2	4	10



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$


 $\succeq \dots \succeq$


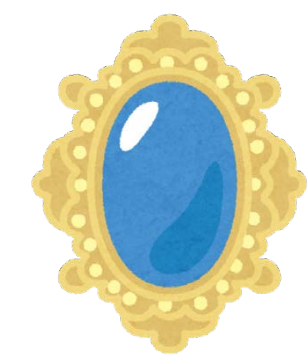








1 2 3

加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$

$u_1(\text{diamond ring, pocket watch}) = 11$



				
5	1	2	4	10

妬みのない配分 (Foley, 1967)

◆ 配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ が **envy-free**

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

自分の持ち分で得られる嬉しさ

他人の持ち分で得られる嬉しさ

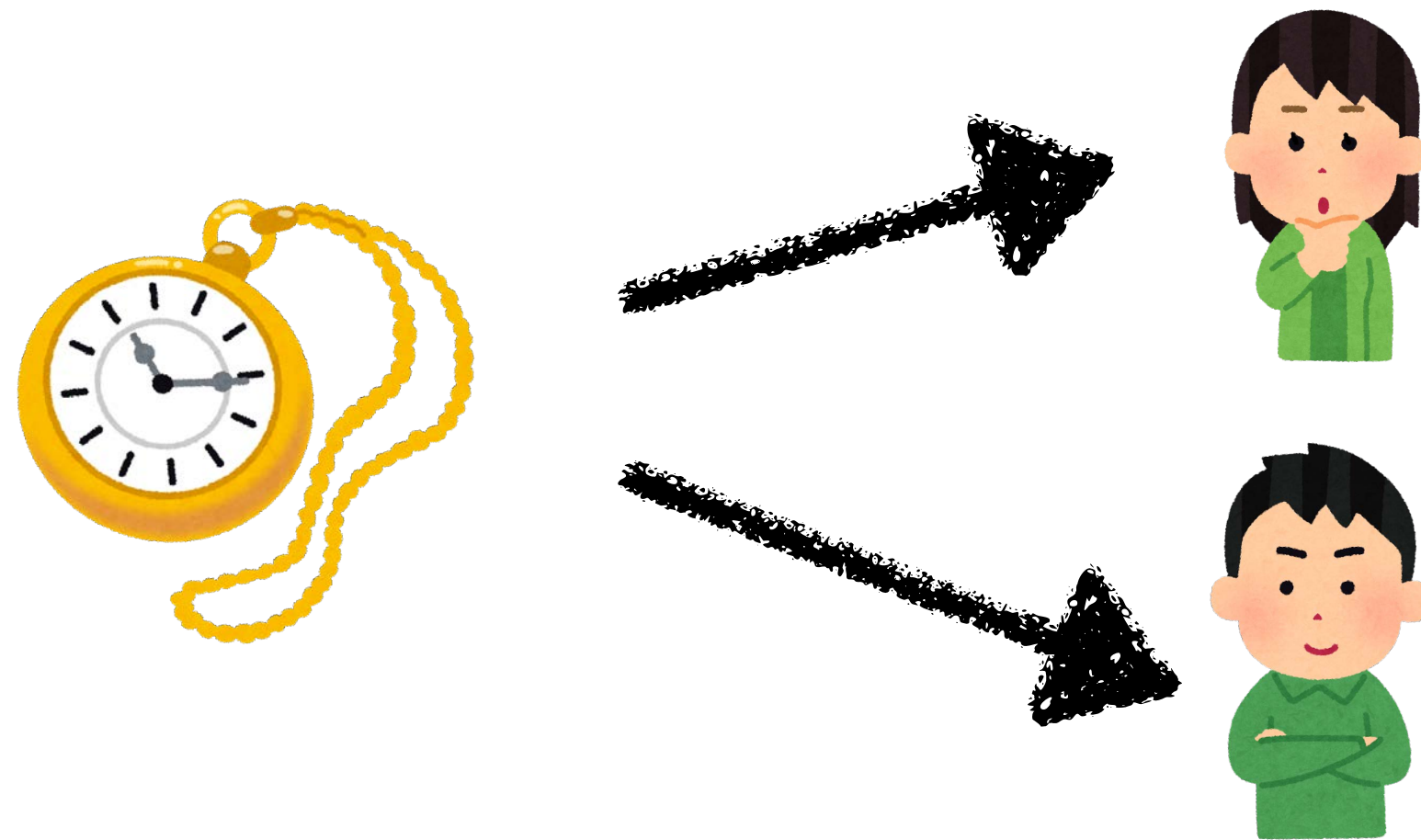
妬みのない配分 (Foley, 1967)

◆ 配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ が **envy-free**

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

自分の持ち分で得られる嬉しさ

他人の持ち分で得られる嬉しさ



どのように配分しても
妬みが発生！

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

EF1



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる。

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

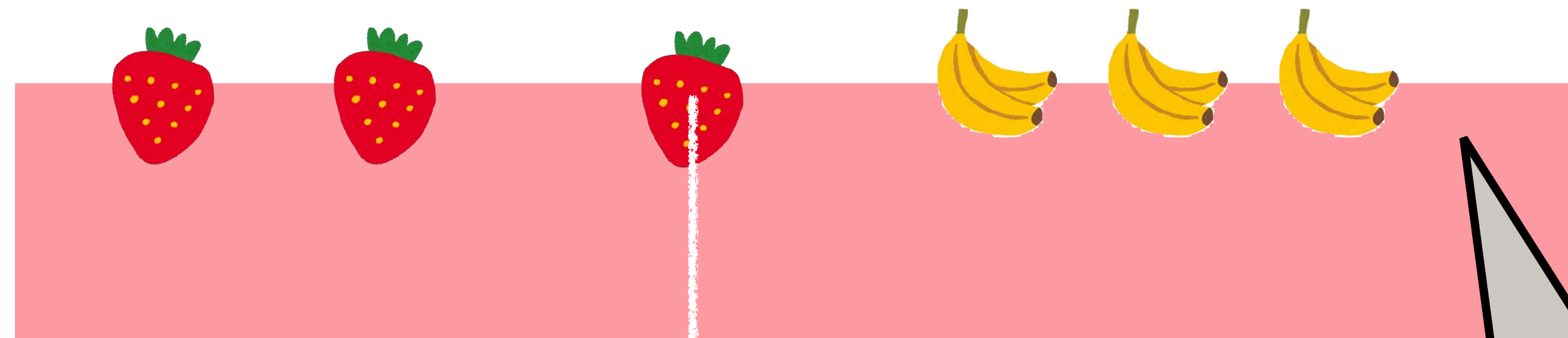
$$\text{または } \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

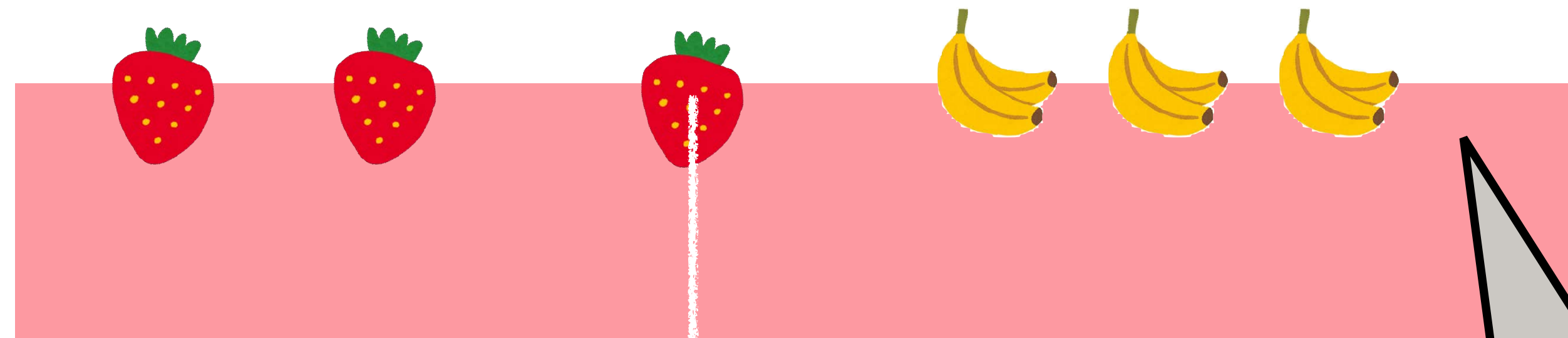
- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.



近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.



1. アリスがケーキを半分に切る

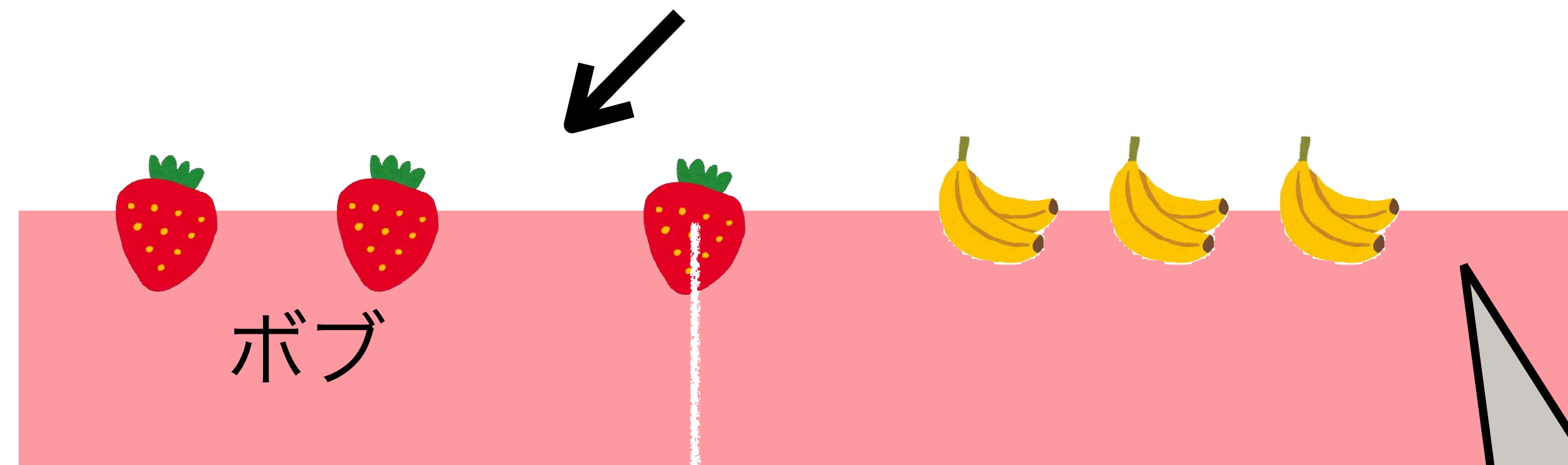
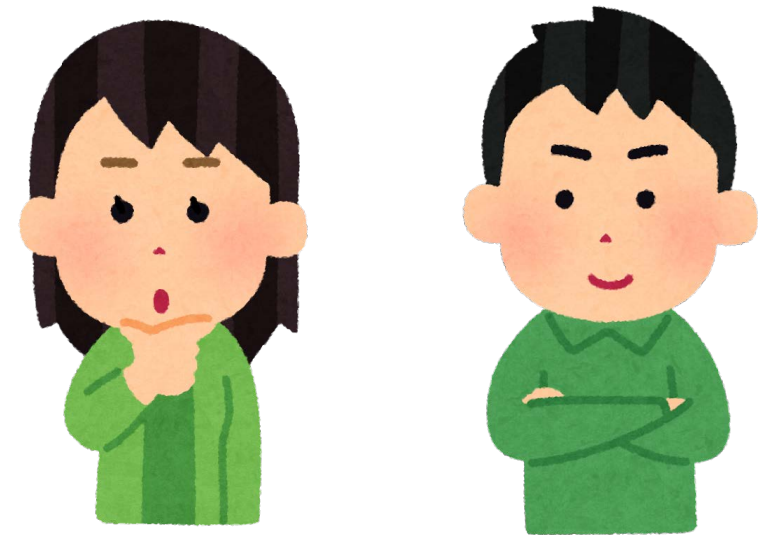
近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？

- Cut and Choose Protocolを離散化する。

2. ボブが好きの方を選ぶ。



1. アリスがケーキを半分に切る

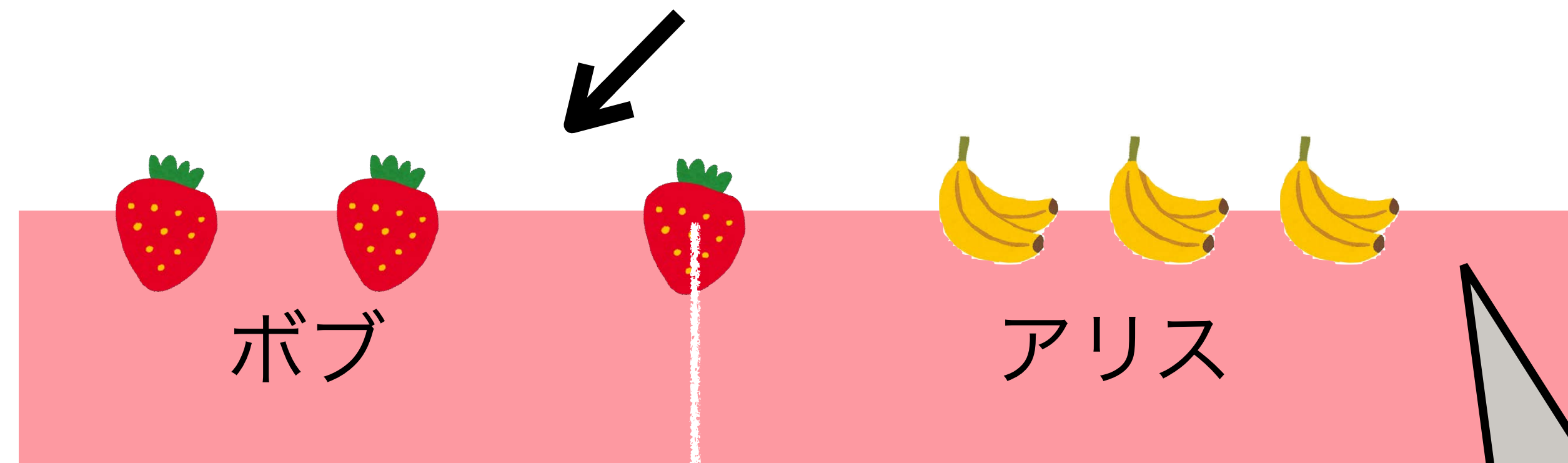
近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？

- Cut and Choose Protocolを離散化する。

2. ボブが好きの方を選ぶ。

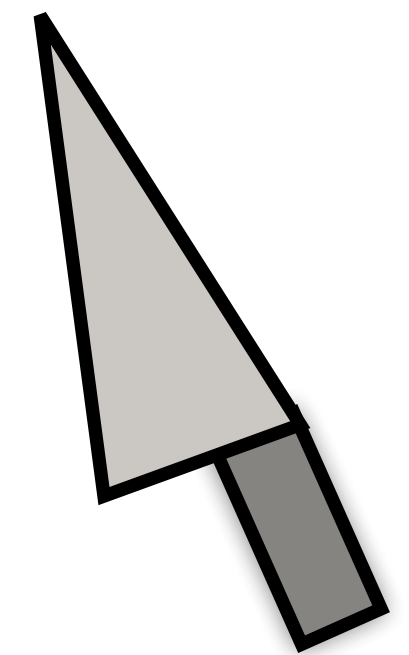
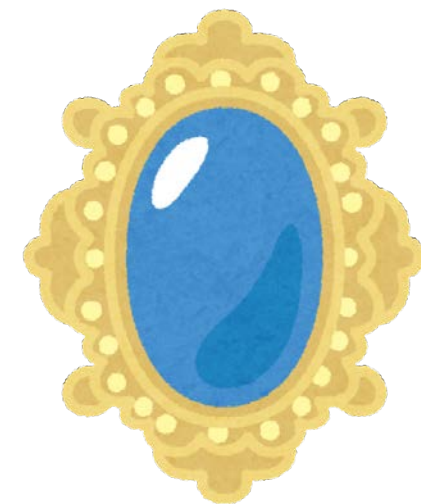


1. アリスがケーキを半分に切る

3. アリスが残りをとる。

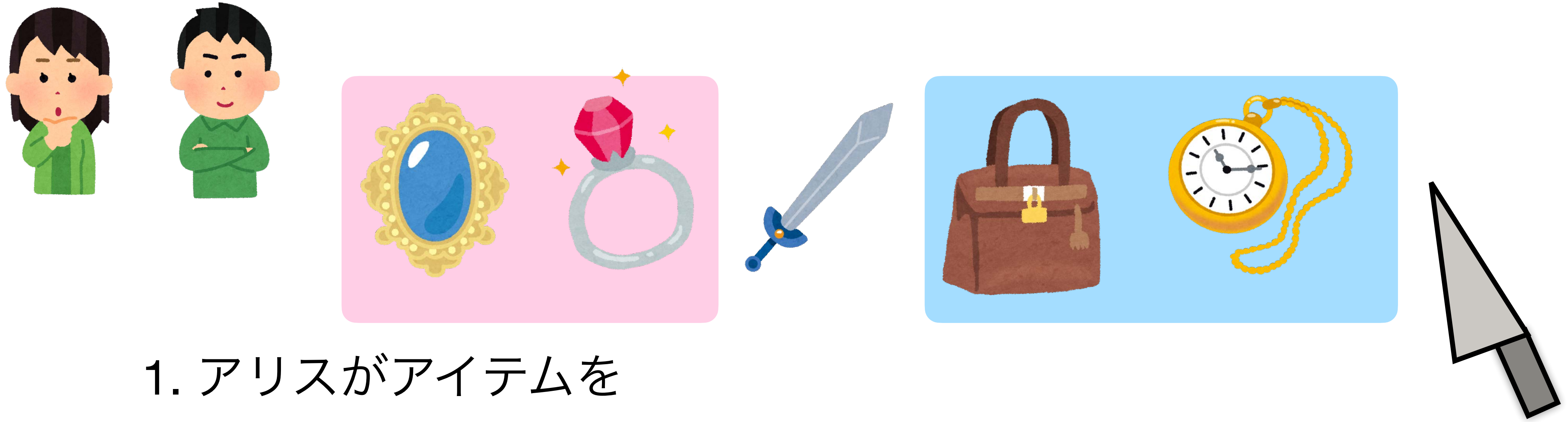
近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.



近似的な公平性

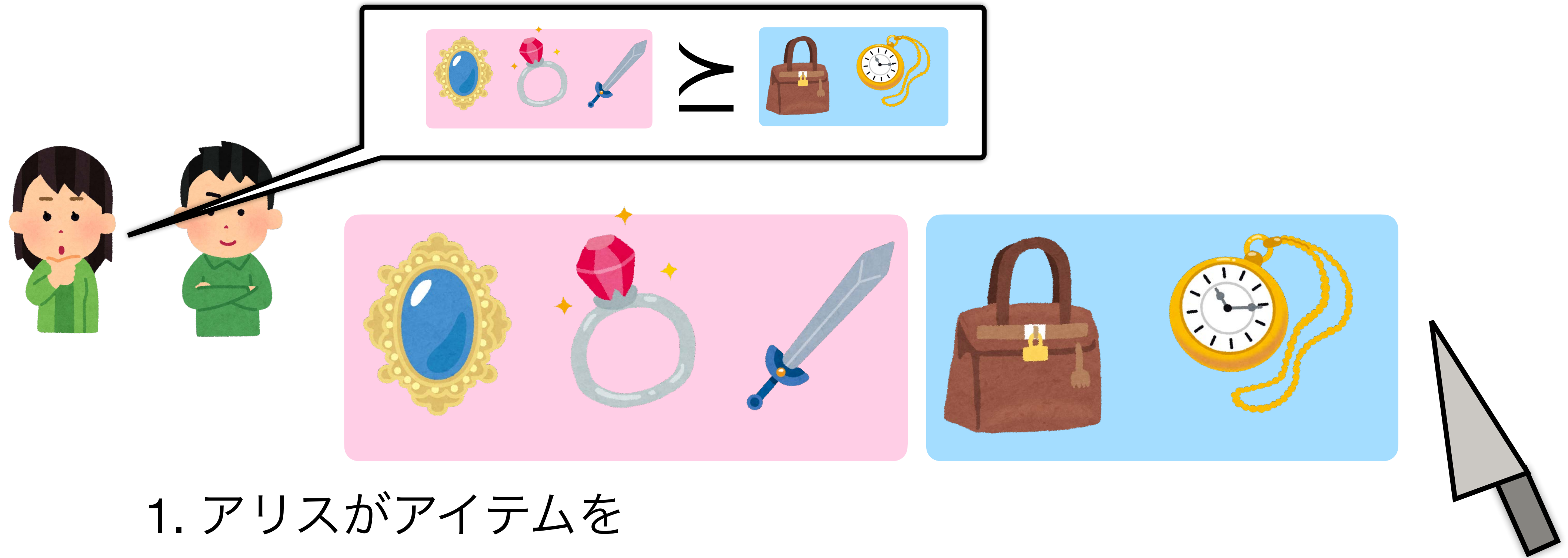
- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

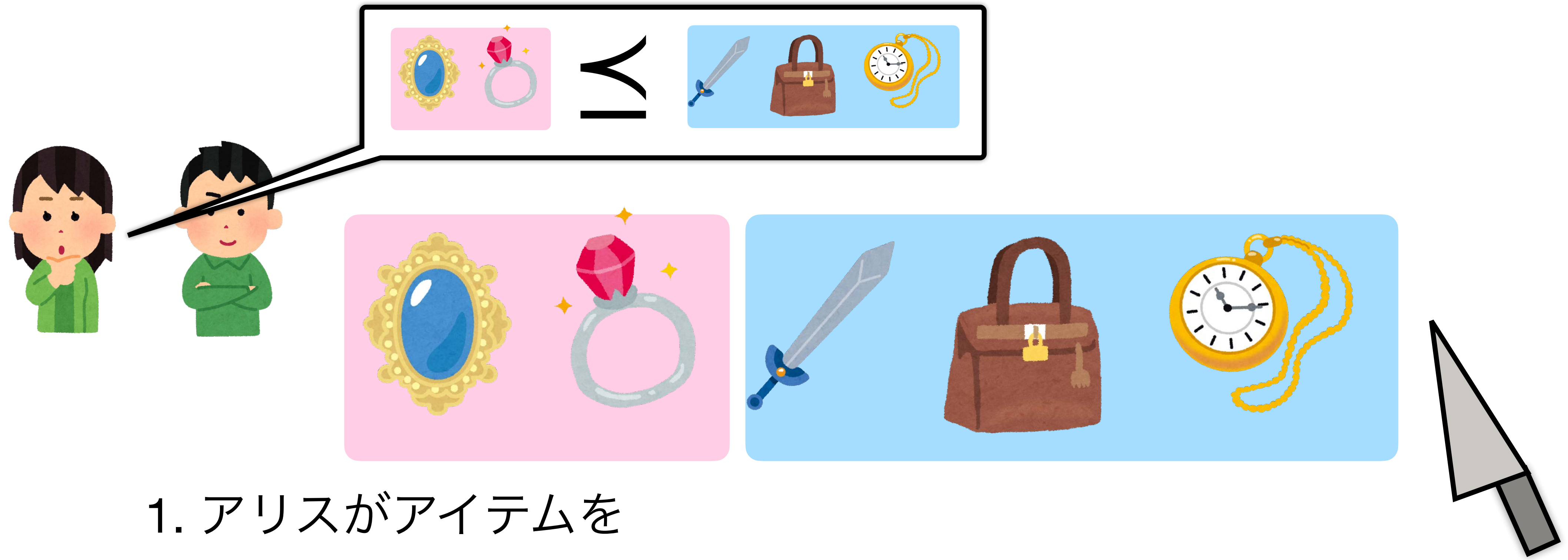
- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する。

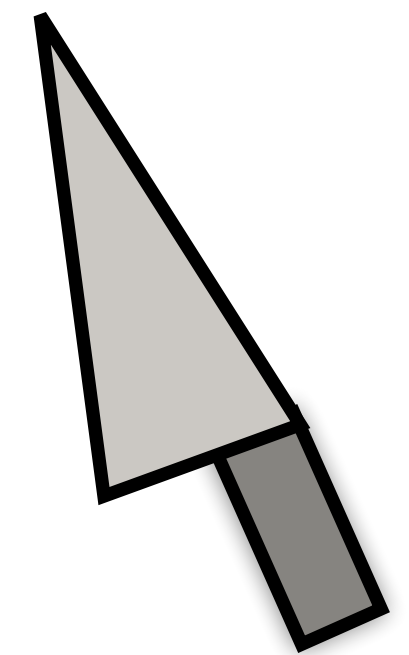


1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する。

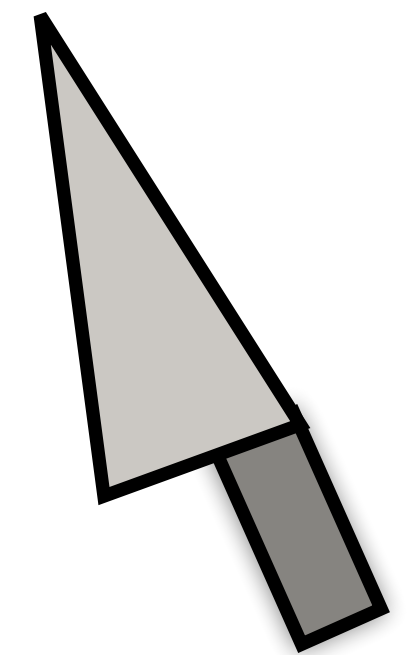
2. ボブが好きな方を選ぶ。

EF1!



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

3. アリスが残りをとる。



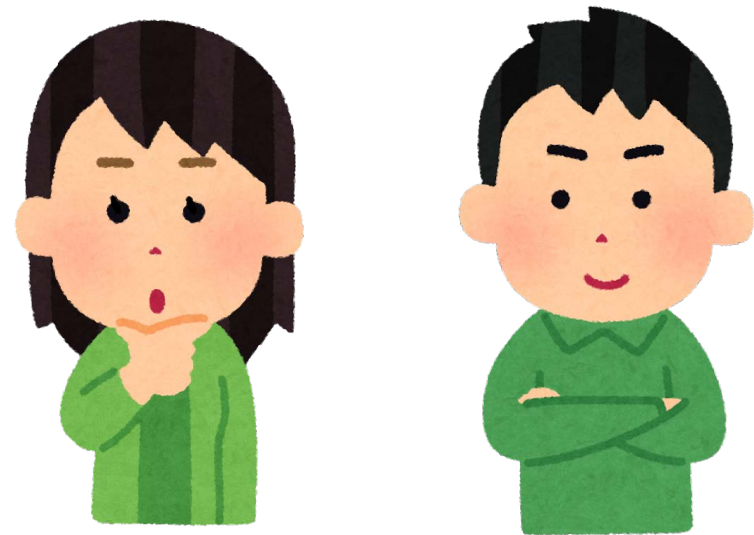
近似的な公平性

- n人エージェント:
EF1 配分は存在し, 効率的に計算可能
(Lipton et al. 2004)

• 2人で公平に分けるには?

• Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



1. アリスがアイテムを

おおよそ半分に分ける点を指定

3. アリスが残りをとる.

公平性と効率性の両立

- 公平分割理論の究極的なゴール：
公平性を満たすだけでは、十分ではない。

何も配分しないという配分もある意味公平。

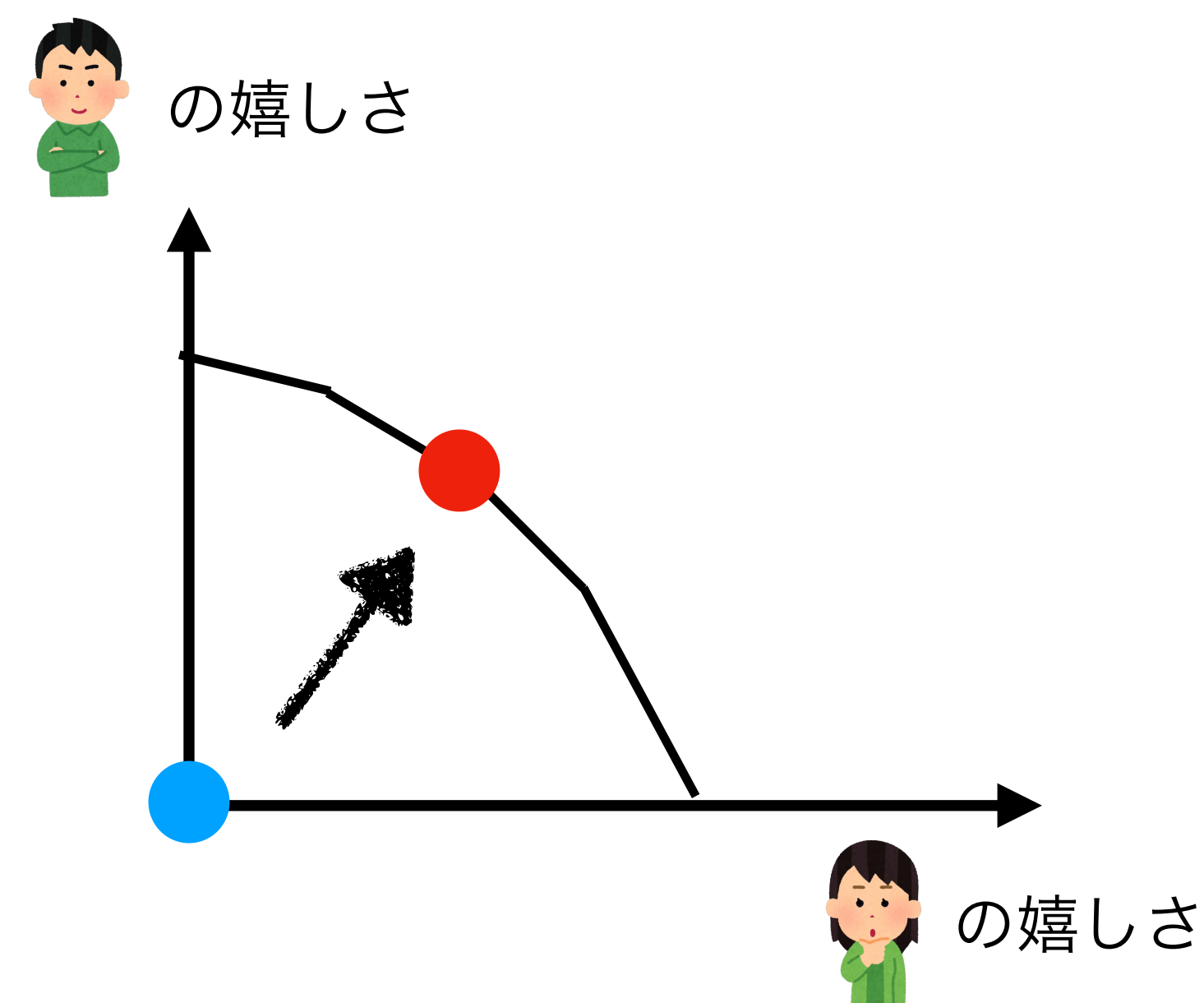
→ 現実には公平性と効率性との両立が求められる。

公平性と効率性の両立

- 公平分割理論の究極的なゴール：
公平性を満たすだけでは、十分ではない。

何も配分しないという配分もある意味公平。
→ 現実には公平性と効率性との両立が求められる。

- パレート最適性** (Pareto-optimality) :
 - 効率性の尺度の一つ。
 - 全員をより幸せにする配分が存在しない状態。
 - 例：効用の和を最大化 → パレート最適。



公平性と効率性の両立








- ・ 効用関数が加法的である場合, 効用の積を最大化する配分は, EF1とパレート最適性を満たす.

$$\max \prod_{i \in N} u_i(A_i) \rightarrow \text{EF1 \& パレート最適}$$

- ・ 効用の積の最大化は, 2人エージェントにおいてもNP困難.

公平性と効率性の両立

- 勝者調整プロトコルを離散化 (Aziz et al. 2019) :
2人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.

					
	5	4	2	1	10
	10	4	4	3	5

公平性と効率性の両立

ステップ1. 勝者と敗者を決め、暫定的に
勝者に全てのアイテムを配分する.

勝者



敗者



					
勝者	5	4	2	1	10
敗者	10	4	4	3	5

公平性と効率性の両立

ステップ2. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に並べる。

					
勝者 	5	4	2	1	10
敗者 	10	4	4	3	5
効用の比 $\frac{\text{敗者の効用}}{\text{勝者の効用}}$  の効用 /  の効用	2	1	2	3	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ2. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に並べる。

勝者








敗者



効用の比



					
勝者	1	5	2	4	10
敗者	3	10	4	4	5
効用の比	3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ3. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に移す。

勝者








敗者



効用の比



					
勝者	1	5	2	4	10
敗者	3	10	4	4	5
効用の比	3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ3. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に移す。

勝者








敗者



効用の比



					
勝者	1	5	2	4	10
敗者	3	10	4	4	5
効用の比	3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

配分がEF1になったら終了！

勝者



敗者












効用の比



					
勝者	1	5	2	4	10
敗者	3	10	4	4	5
効用の比	3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

- 勝者調整プロトコルを離散化 (Aziz et al. 2019) :
2人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.

					
勝者 	1	5	2	4	10
敗者 	3	10	4	4	5
効用の比 $\frac{\text{敗者の効用}}{\text{勝者の効用}}$  の効用 /  の効用	3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

- ・ 仮想市場を用いるアルゴリズム (Barman et al. 2018):
n人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.



公平性と効率性の両立

市場均衡: 各エージェントが各々の予算の下で効用を最大化するような, 価格と配分のペア

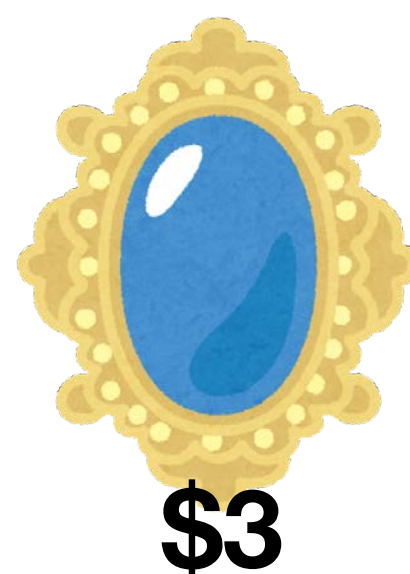
予算額\$10 予算額\$10 予算額\$9



公平性と効率性の両立

ほぼ同一の予算の下（差が高々アイテム一個分の価格）
で市場均衡となる配分と価格のペア (A, p) を求める。

予算額\$10 予算額\$10 予算額\$9



\$3



\$7



\$9



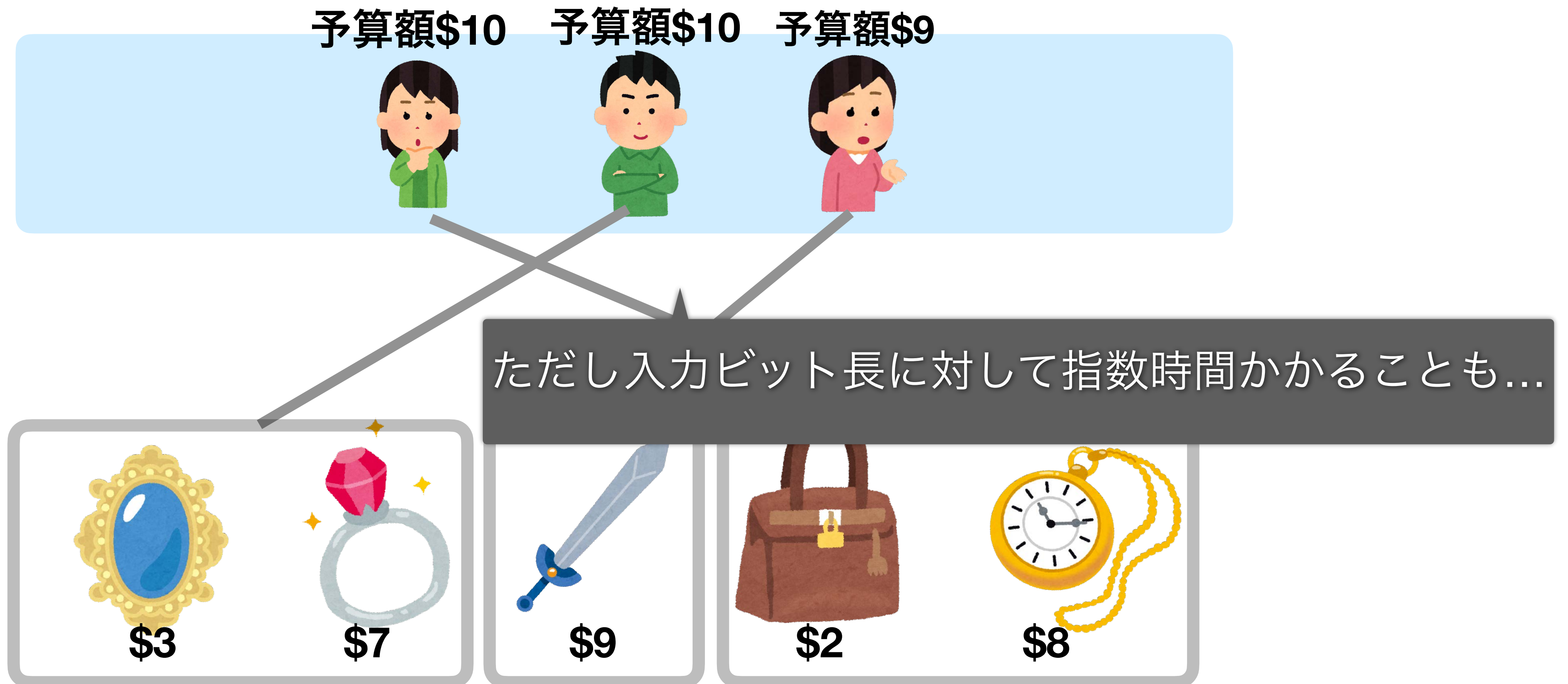
\$2



\$8

公平性と効率性の両立

- 仮想市場を用いるアルゴリズム (Barman et al. 2018):
n人エージェントに対し、**EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する。






発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

EF1



		
3	1	1
3	1	1




発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある。しかし、EF1より強い公平性の概念（EFX）が存在するかどうかはわかっていない。

No envy



		
3	1	1
3	1	1




発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある。しかし、EF1より強い公平性の概念（EFX）が存在するかどうかはわかっていない。

Envy



		
3	1	1
3	1	1




発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある。しかし、EF1より強い公平性の概念（EFX）が存在するかどうかはわかっていない。

EFX



		
3	1	1
3	1	1

発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある。しかし、EF1より強い公平性の概念（EFX）が存在するかどうかはわかっていない。

EFX [Caragiannis et al., 2016]

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \forall v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

発展&今後の展開

今後の展開：

- EF1は公平性の概念として弱いという意見もある。しかし、EF1より強い公平性の概念（EFX）が存在するかどうかはわかっていない。

発展的な話題：

- 他の公平性の基準: Equitability, Proportionality
- ゲーム理論的な側面: エージェントが自分の好みに関して嘘をつく可能性
- 仕事の配分: アイテムが多いほど嬉しいという仮定が成立しないこともある

まとめ・さいごに（高校生向け）

- 数理にもとづいた手法を使うことで、透明性の高い意思決定を手助けできる.
- ルール（アルゴリズム）の透明性・説明可能性の問題.

将来研究者になることに関心があるなら：

- 自分の興味をとことん追求できる. 研究者になってよかったと思っています.
- 研究の世界に国境はないので、英語はできた方が良くかも.
- 参考図書：杉原厚吉 大学教授という仕事

引用文献

- Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh. Fair allocation of indivisible goods and chores. IJCAI 2019.
- Barman, Krishnamurthy, Vaish. Finding fair and efficient allocations, EC 2018
- Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang. The unreasonable fairness of maximum Nash welfare. EC 2016.
- Budish. The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes. Journal of Political Economy, 2011.
- Dubins and Spanier. How to cut a cake fairly. The American Mathematical Monthly, 1961.
- Foley. Resource Allocation and the Public Sector. Yale Economics Essay, 1967.
- Lipton, Markakis, Mossel, Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. EC 2004.