

アルゴリズムで世の中を公平に？

ケーキ分けから家事分担まで

ケーキ分け問題



ケーキ分け問題



ケーキ分け問題



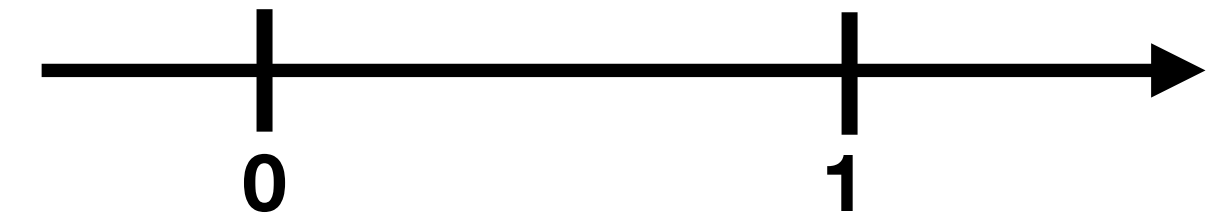
- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]



ケーキ分け問題



- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]

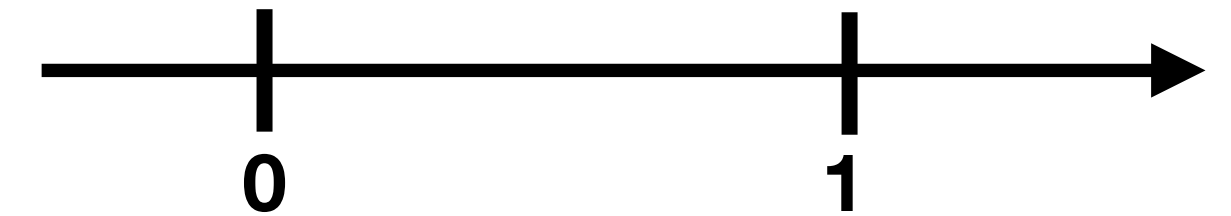


- $[0,1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]

ケーキ分け問題



- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]

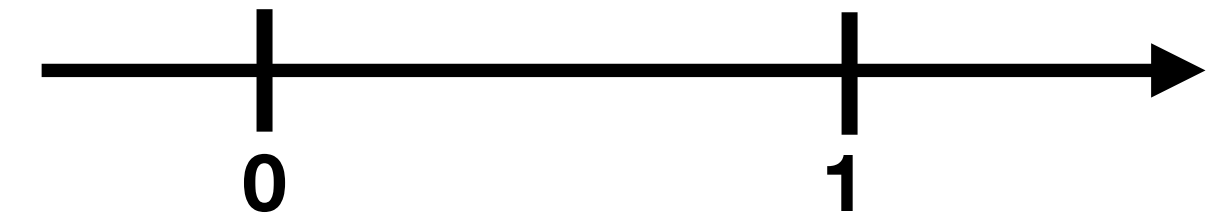


- $[0,1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]
- n 人エージェントでの妬みのない配分の存在 [Dubins-Spanier, 1961]

ケーキ分け問題



- Cut and Choose [旧約聖書 紀元前??]



- $[0,1]$ 区間を分ける問題にモデル化 [Hugo Steinhaus, 1948]
- n 人エージェントでの妬みのない配分の存在 [Dubins-Spanier, 1961]
- 有界なプロトコル [Aziz-Mackenzie, FOCS 2016]

公平分割理論 (Fair division)

- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析.
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)



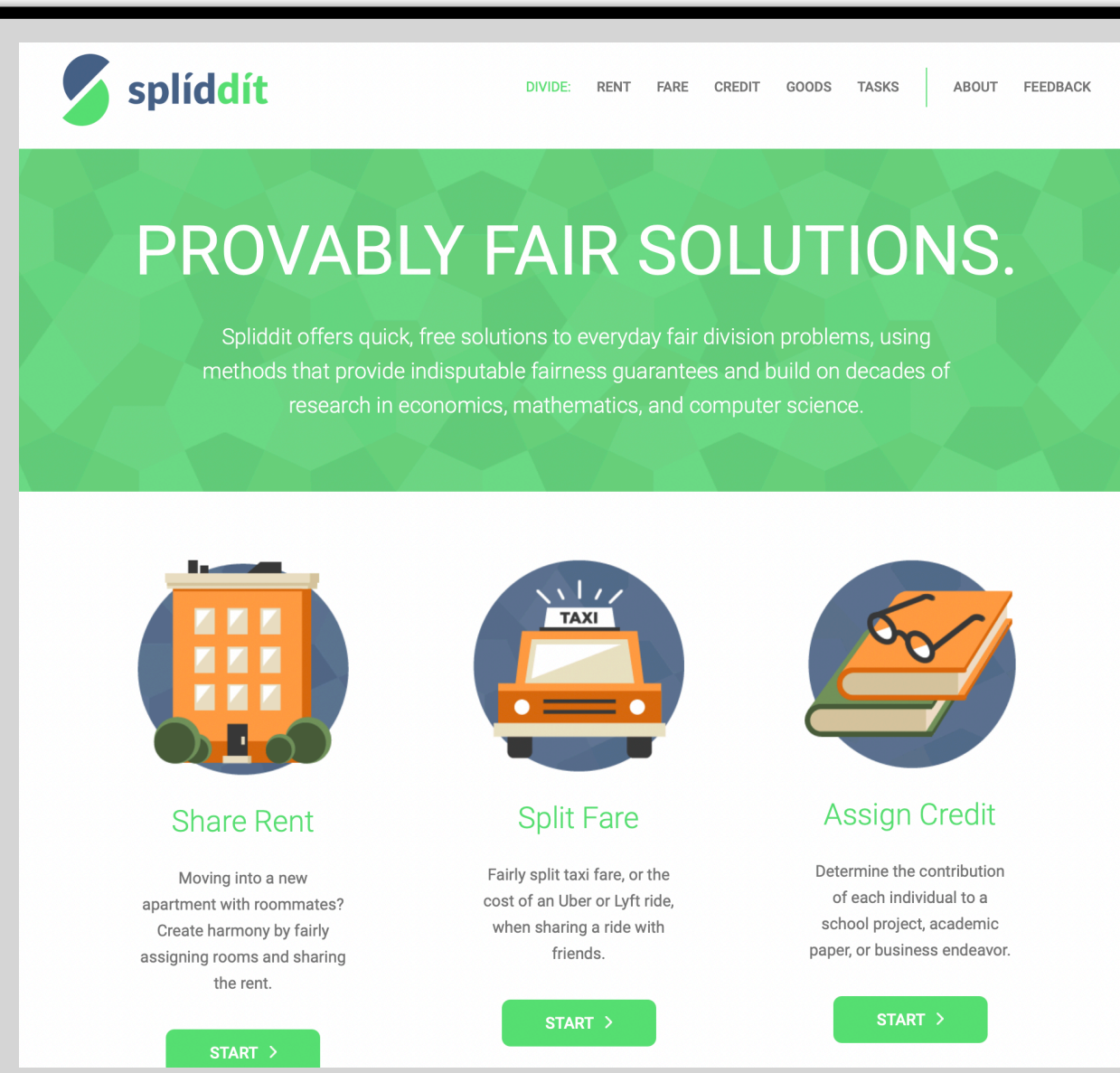
公平分割理論 (Fair division)



- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析.
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)
- ウェブサービス
 - Spliddit (<http://www.spliddit.org>) : 財産分与, タクシーの運賃など
 - Course Match: 授業割り当て
 - New York Times Rent Division Calculator: 家賃分担

公平分割理論 (Fair Division Theory)

- 公平な資源配分メカニズムを開発
(例：講義割当, 査読割当, タクシー)
- ウェブサービス



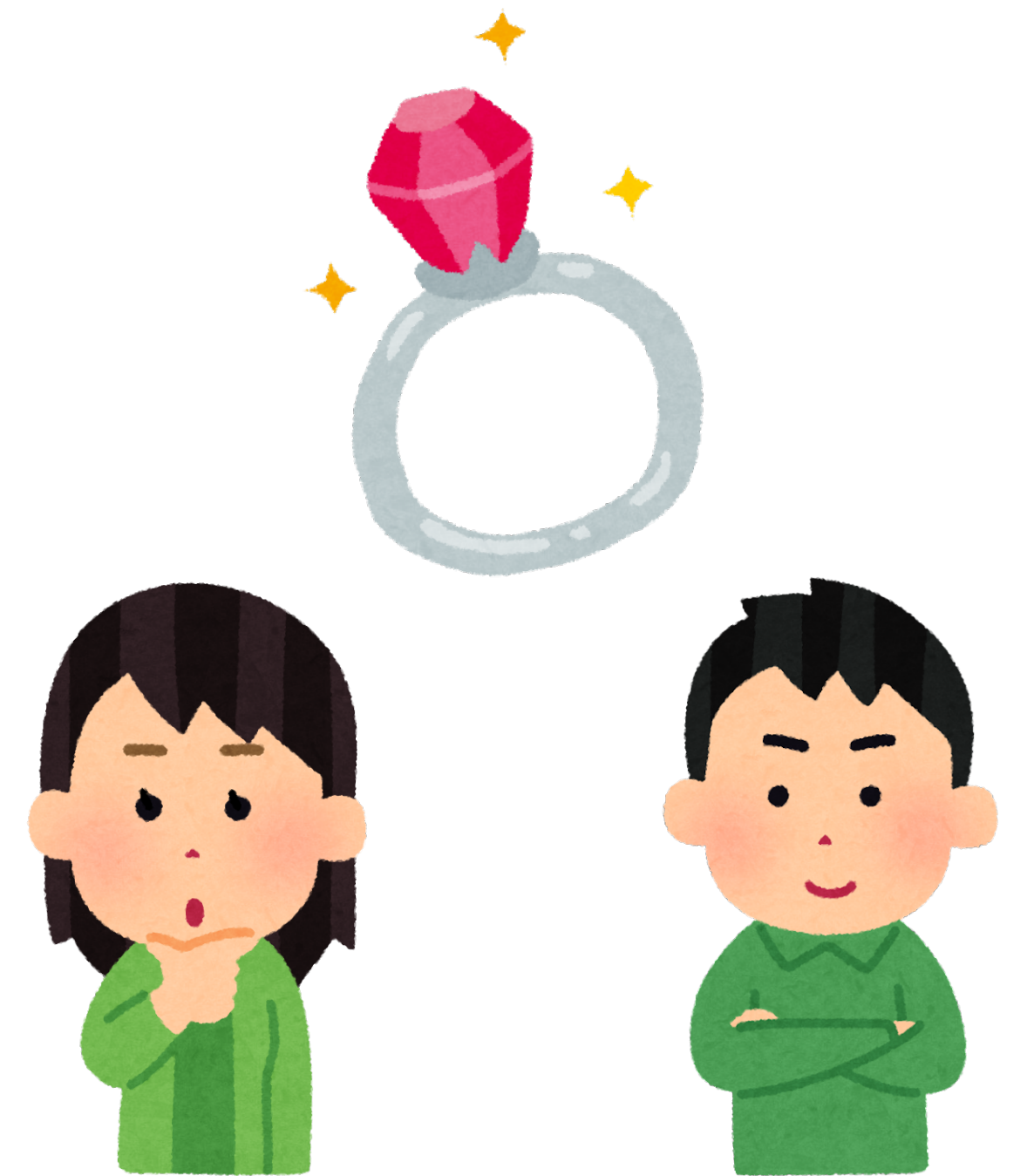
The screenshot shows the Spliddit website interface. At the top is the Spliddit logo and a navigation bar with links: DIVIDE, RENT, FARE, CREDIT, GOODS, TASKS, ABOUT, and FEEDBACK. Below the navigation bar is a green banner with the text 'PROVABLY FAIR SOLUTIONS.' and a subtext: 'Spliddit offers quick, free solutions to everyday fair division problems, using methods that provide indisputable fairness guarantees and build on decades of research in economics, mathematics, and computer science.' Below the banner are three main sections: 'Share Rent' (with an apartment icon), 'Split Fare' (with a taxi icon), and 'Assign Credit' (with a book icon). Each section has a brief description and a 'START >' button. At the bottom of the screenshot, it says '検索日: 2021年11月9日'.

- 2014年にCMUの研究グループが開発した一般向けのサービス
- 開発から1週間で2万人の人がウェブサイトを利用

- Spliddit (<http://www.spliddit.org>) : 財産分与, タクシーの運賃など
- Course Match: 授業割り当て
- New York Times Rent Division Calculator: 家賃分担

公平分割理論 (Fair division)

- 公平な資源配分メカニズムを数理的に解析.
(例：講義割当, 査読割当, タスク割当, 財産分与)
- ケーキは本当にどこでも切れるのか？
 - 離散的なアイテム (indivisible item) の公平配分
 - 公平な配分は存在するとは限らない…
 - 近似的な公平性を達成できるか？



自身の興味や研究としての意義（高校生向け）

興味や経緯

- ・ 高校生のときに、数学が好きで、数学を使って社会に役に立つような分野はないか考えていた.
- ・ 大学で勉強したゲーム理論や数理最適化が非常に面白く感じた.

研究としての意義

- ・ 社会との距離感が非常に近い.
- ・ 身近な問題に対して、数理的に考えることで、物事を整理しやすい.
例えば、家事分担を理論的に考えることができる.

モデル

エージェントの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$



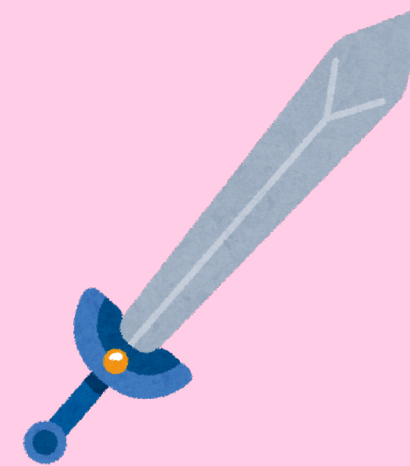
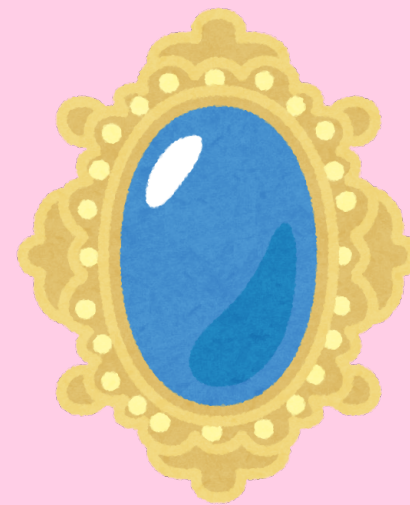
1



2



3



アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

モナカの効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

あるアイテムの組合せを
もらったときの嬉しさ



$\geq \dots \geq$



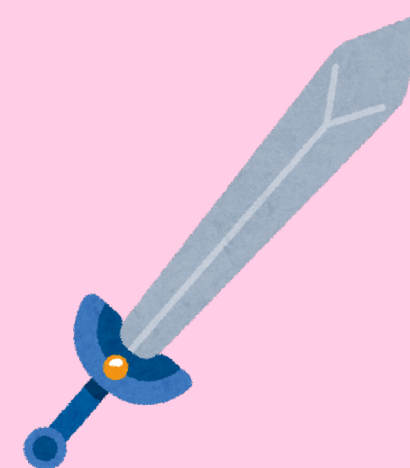
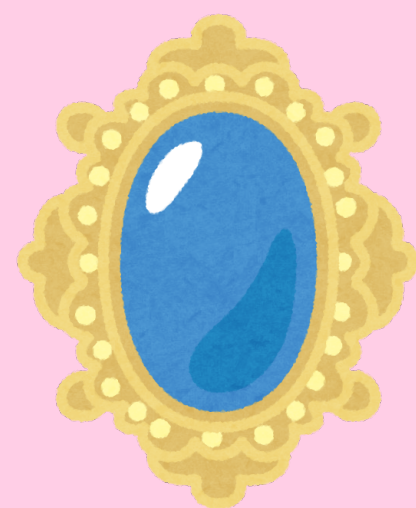
1



2



3

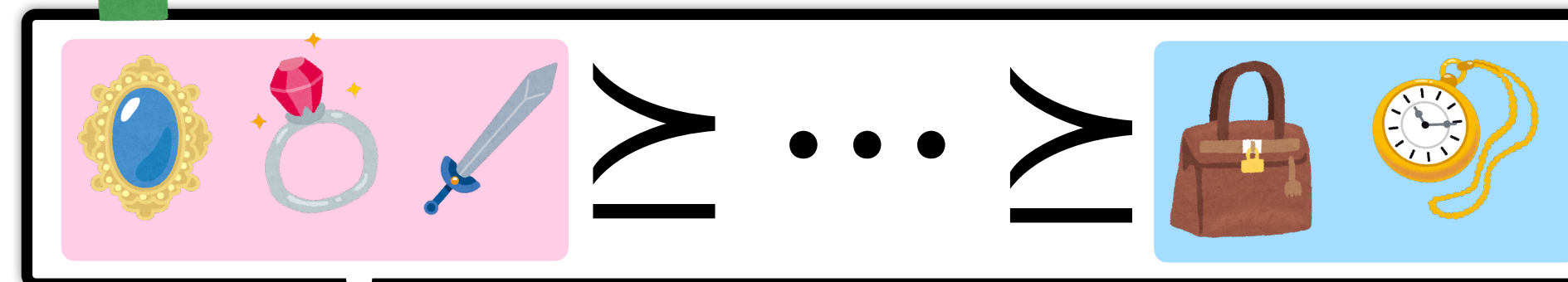


アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

モデル



の効用関数 $u_2 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



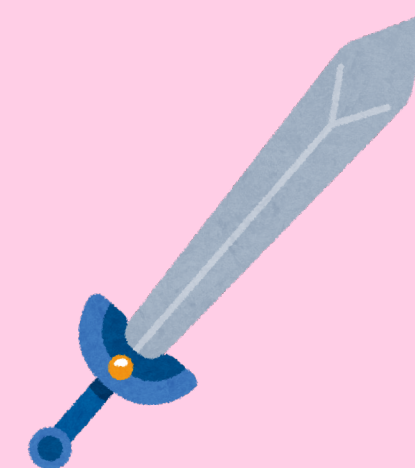
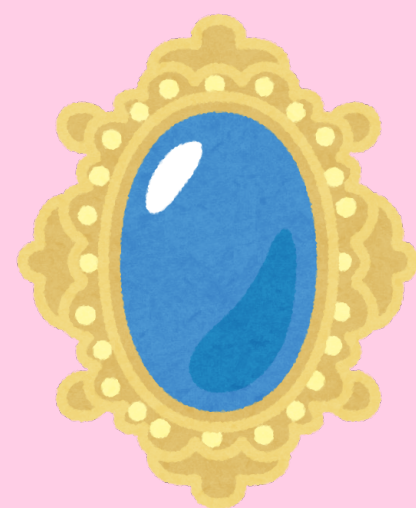
1



2



3

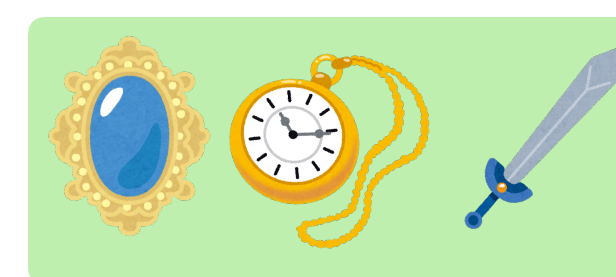


アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

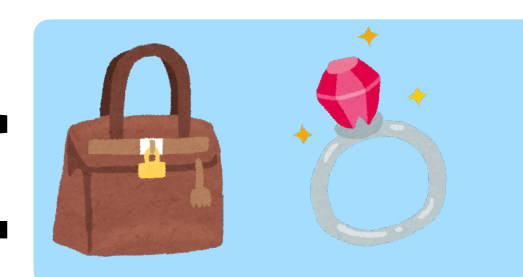
モデル



の効用関数 $u_3 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



$\geq \dots \geq$



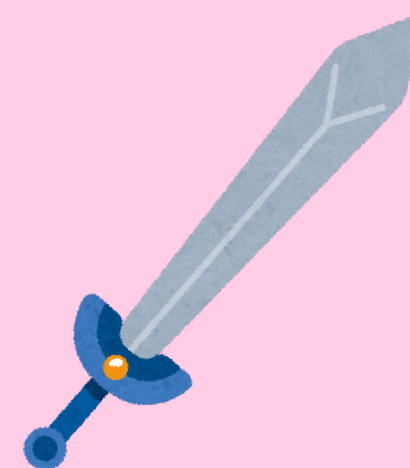
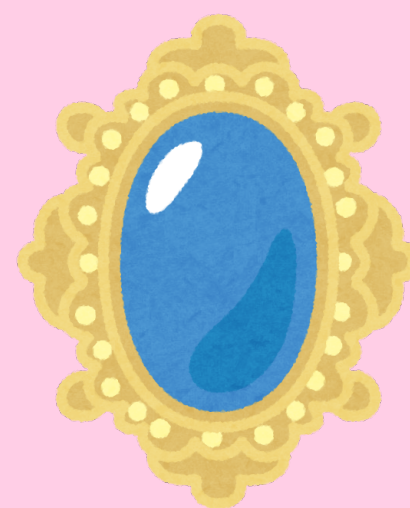
1



2



3



アイテムの集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

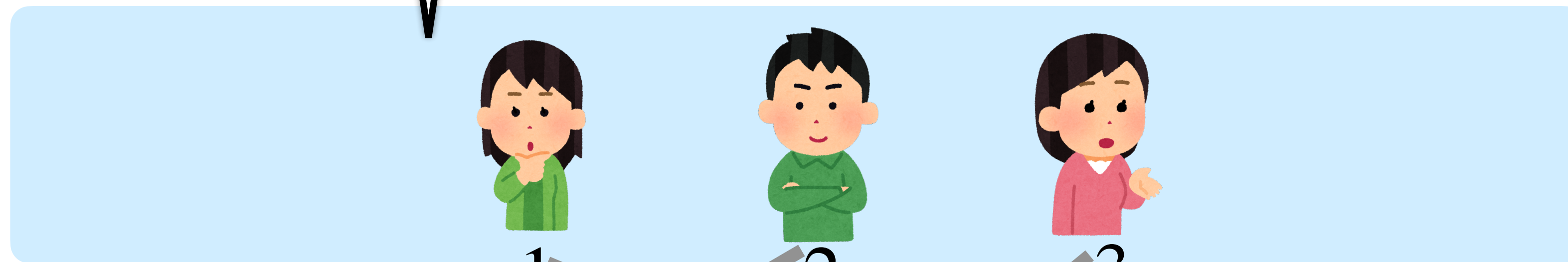
モノ



$\geq \dots \geq$



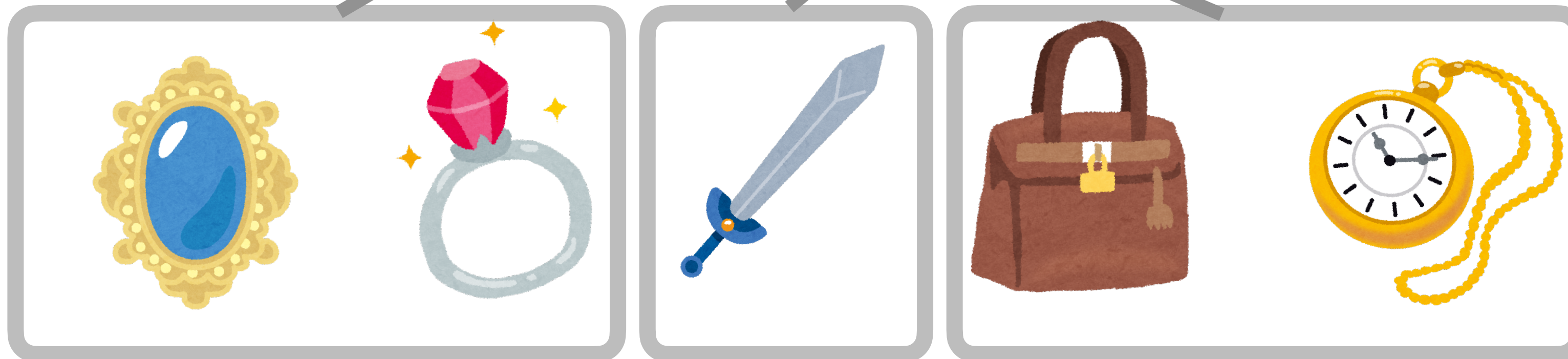
$\dots$



1

2

3



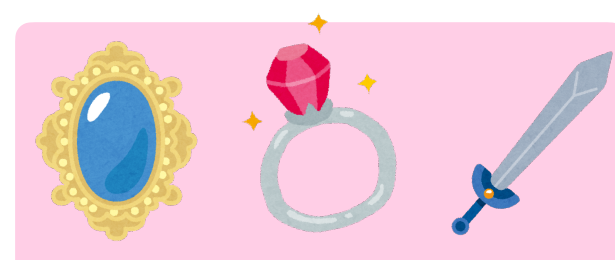
配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ (アイテム集合 V の分割)



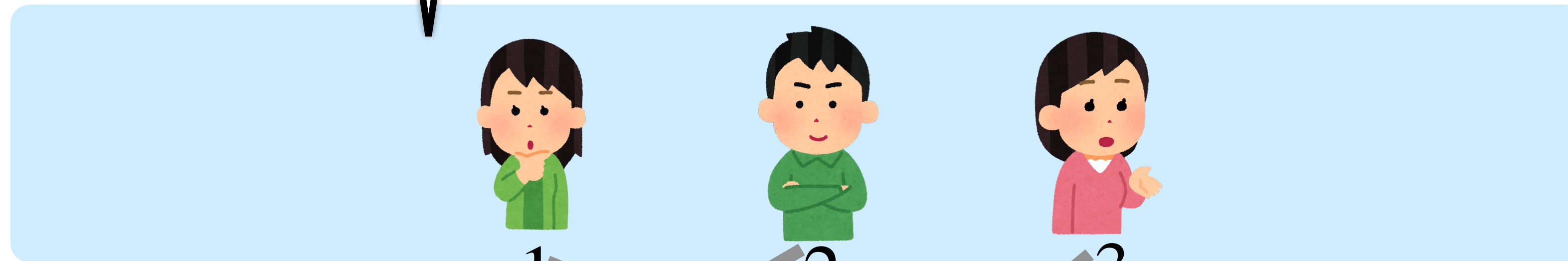
の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$



$\geq \dots \geq$



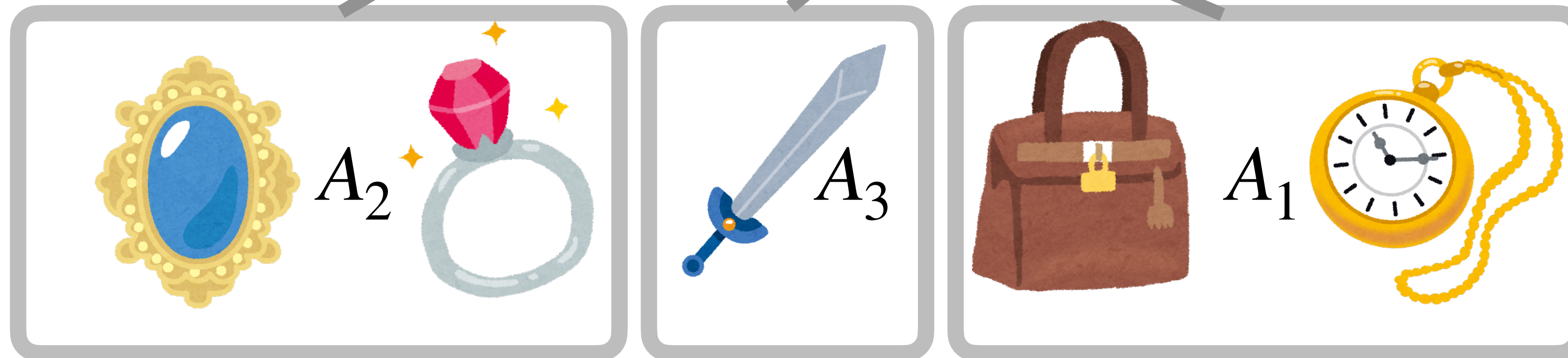
$\dots$



1

2

3



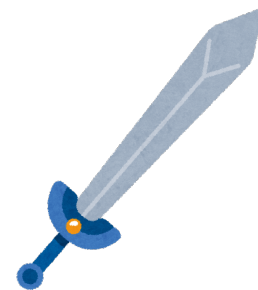
配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ (アイテム集合 V の分割)

モエの効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

 $\geq \dots \geq$ 

1 2 3

加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$

					
	5	1	2	4	10

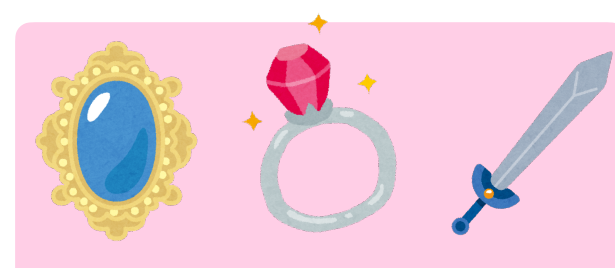


の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

モナリス



$\geq \dots \geq$



1



2



3

加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$

$$u_1(\text{bag, watch}) = 14$$

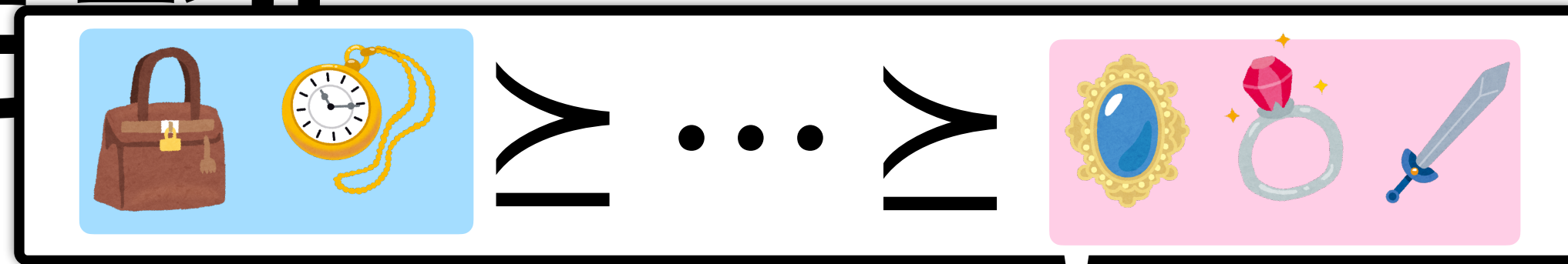


5	1	2	4	10



の効用関数 $u_1 : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$

モ



1



2



3

加法的な効用関数 $u_i(X) = \sum_{v \in X} u_i(v)$

$$u_1(\text{diamond ring, pocket watch}) = 11$$



5	1	2	4	10

妬みのない配分 (Foley, 1967)

◆ 配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ が **envy-free**

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

自分の持ち分で得られる嬉しさ

他人の持ち分で得られる嬉しさ

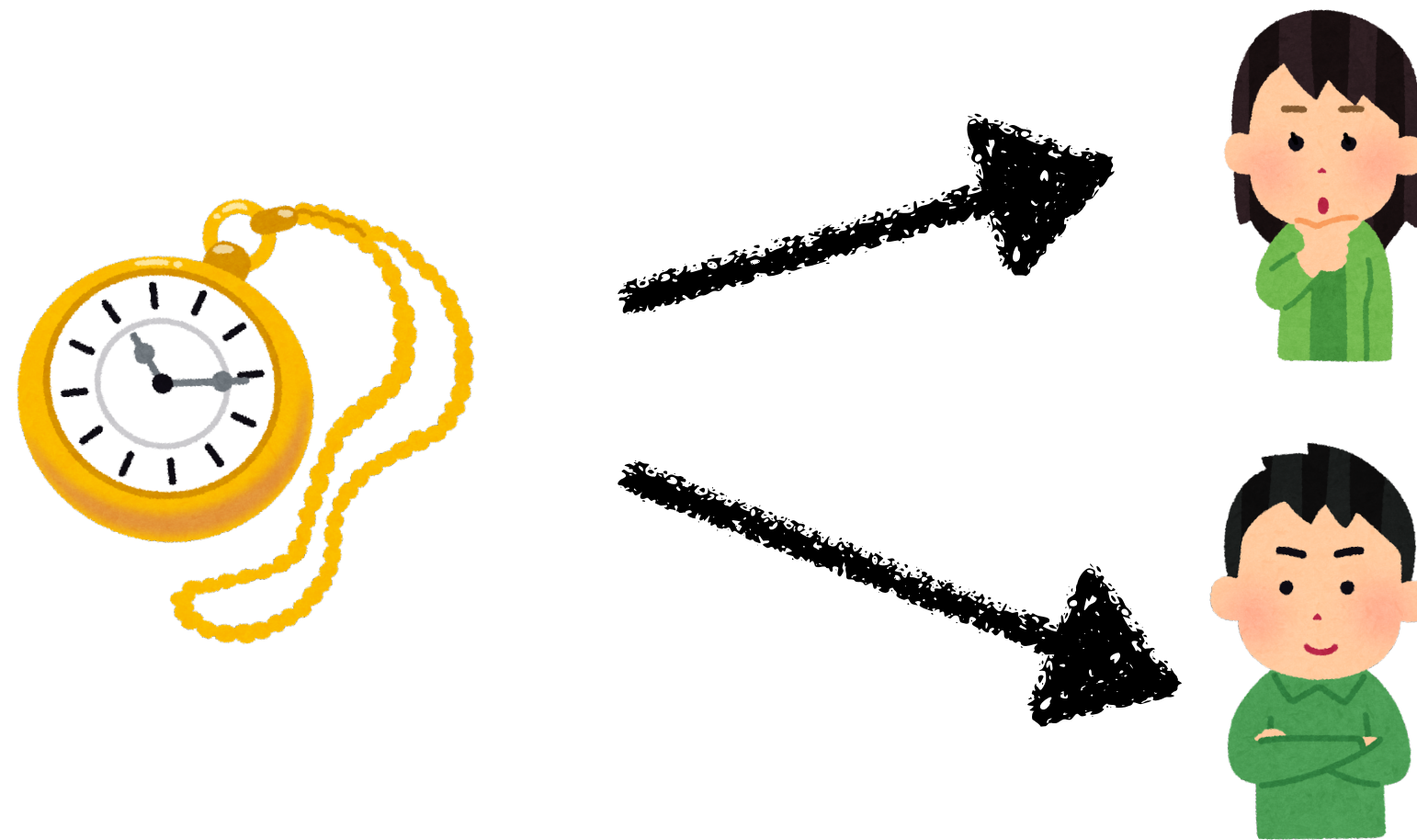
妬みのない配分 (Foley, 1967)

◆ 配分 $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ が **envy-free**

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

自分の持ち分で得られる嬉しさ

他人の持ち分で得られる嬉しさ



どのように配分しても
妬みが発生！

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

- Budish (2011): 近似的な公平性の概念を提案
 - ◆ **Envy-freeness up to one good (EF1)** → 妬みのない配分の近似版
妬みが高々アイテム一つ分で抑えられる.

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

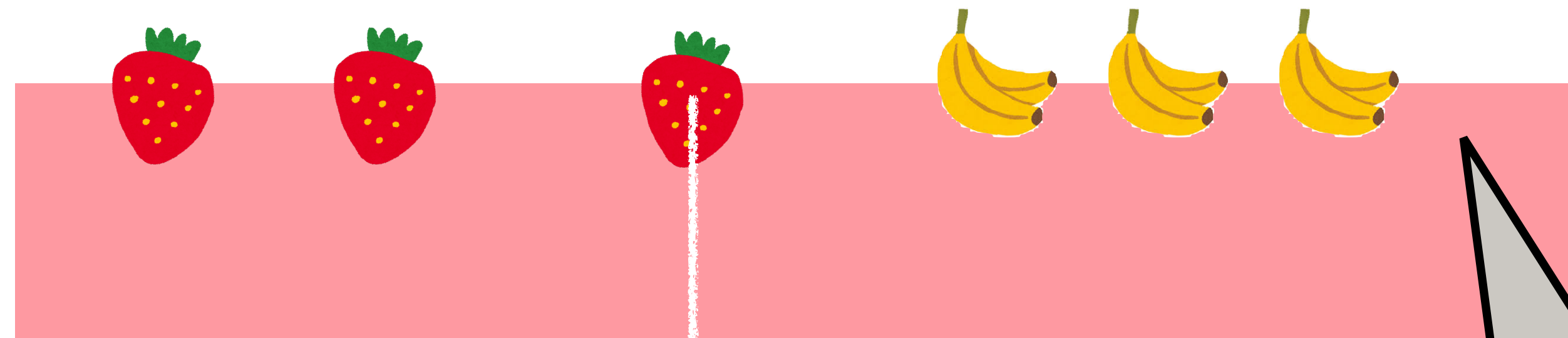
$$\text{または} \quad \exists v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

Not EF1!



近似的な公平性

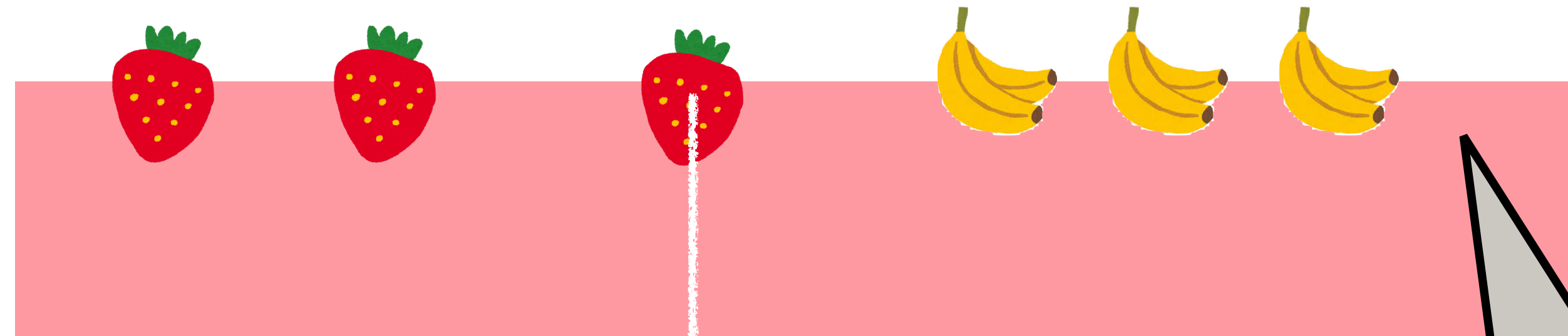
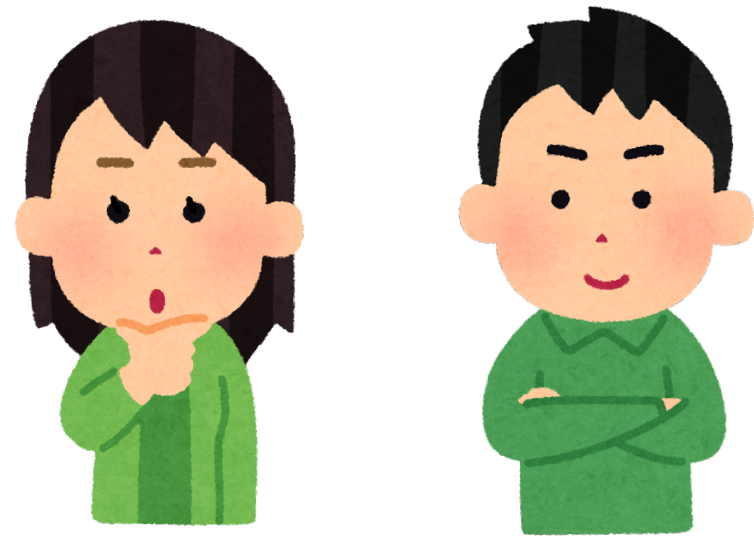
- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.



近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.



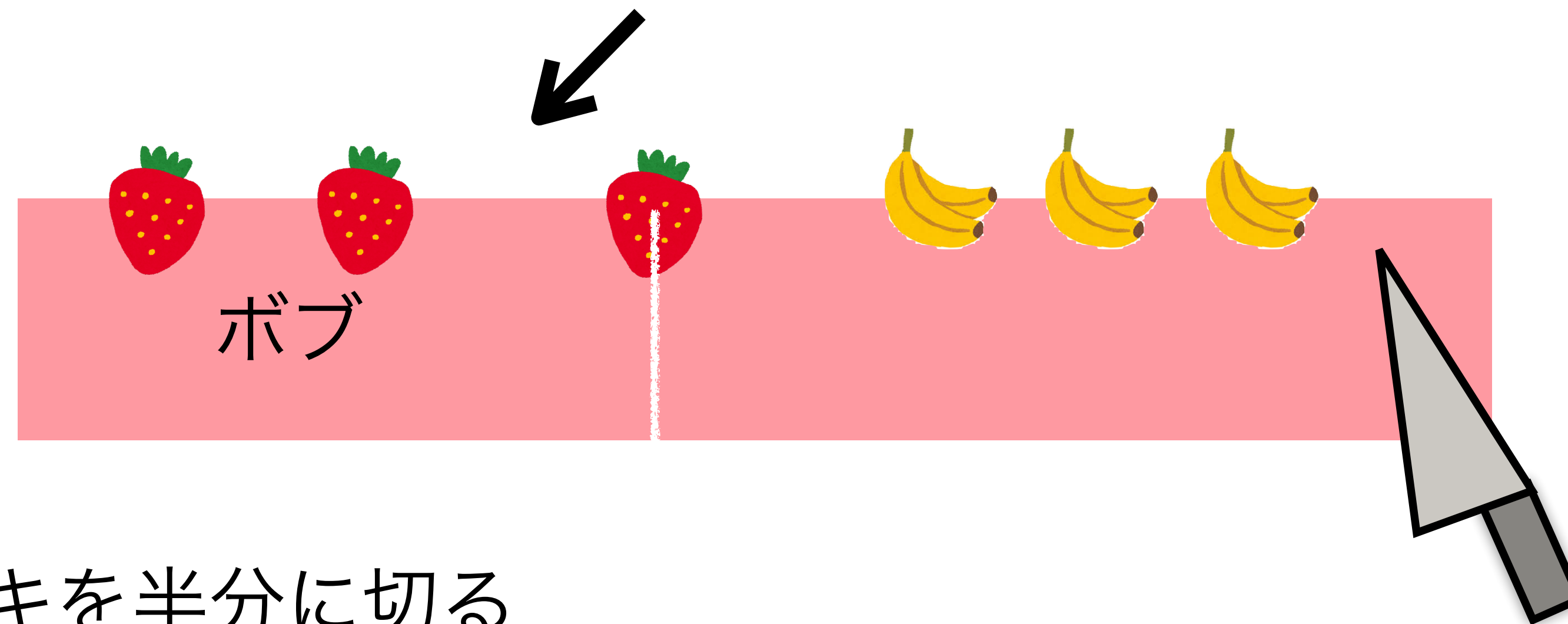
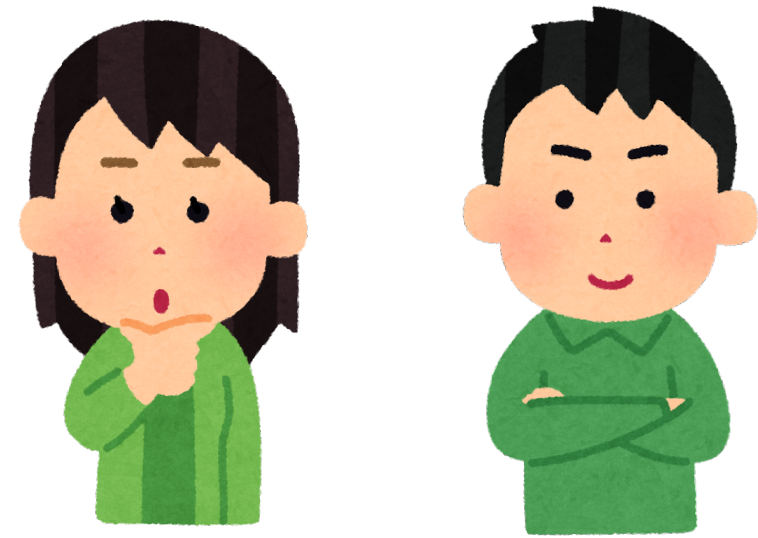
1. アリスがケーキを半分に切る

近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



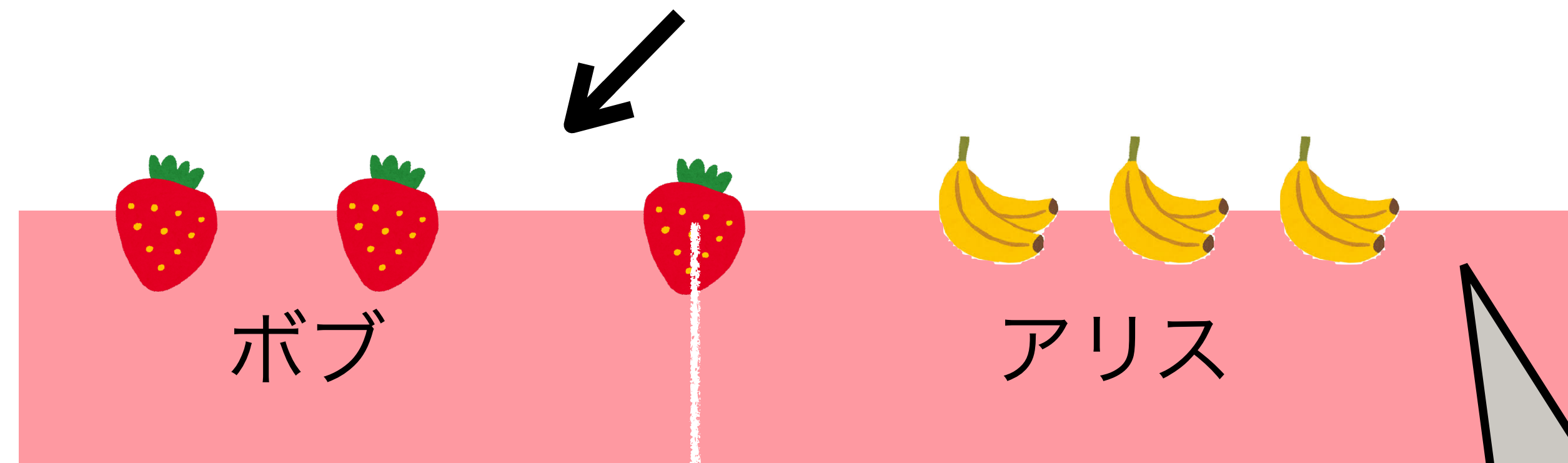
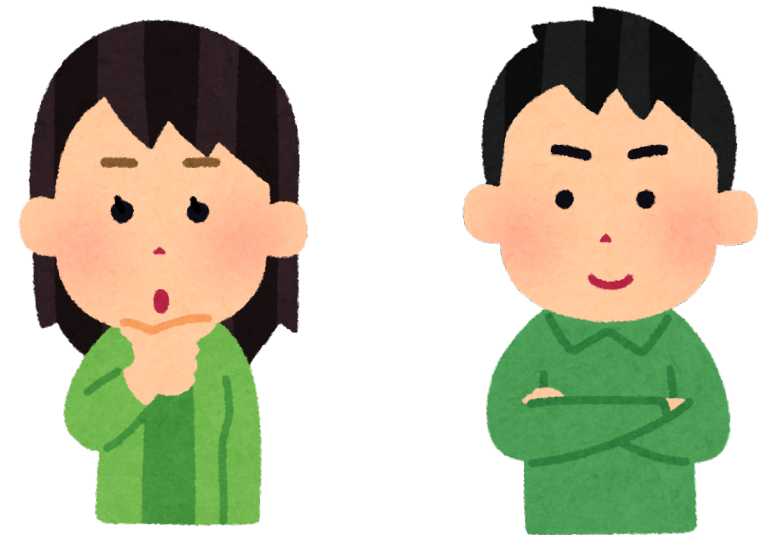
1. アリスがケーキを半分に切る

近似的な公平性

2人エージェントの妬みのないケーキ配分を計算

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



1. アリスがケーキを半分に切る

3. アリスが残りをとる.

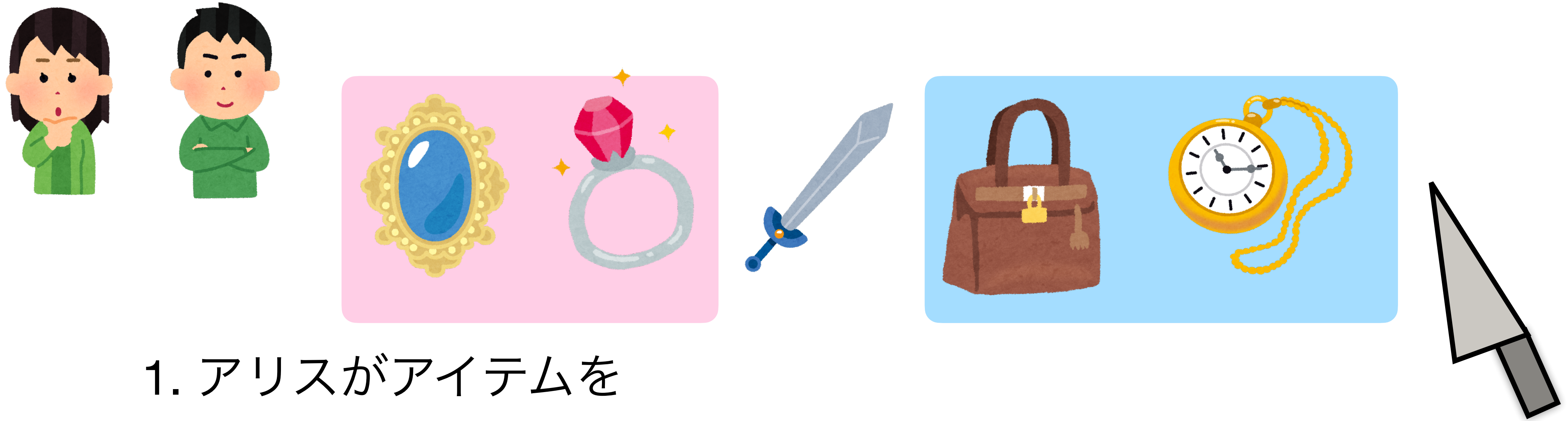
近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.



近似的な公平性

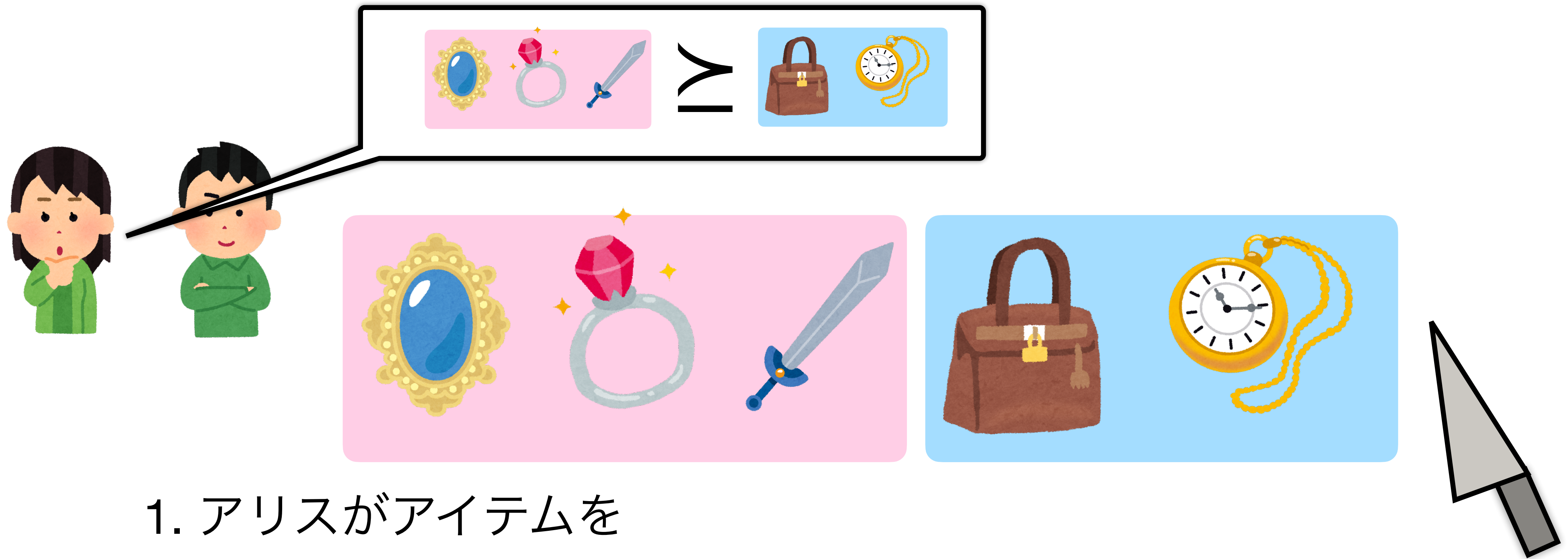
- ・ 2人で公平に分けるには？
 - ・ Cut and Choose Protocolを離散化する.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
- Cut and Choose Protocolを離散化する.

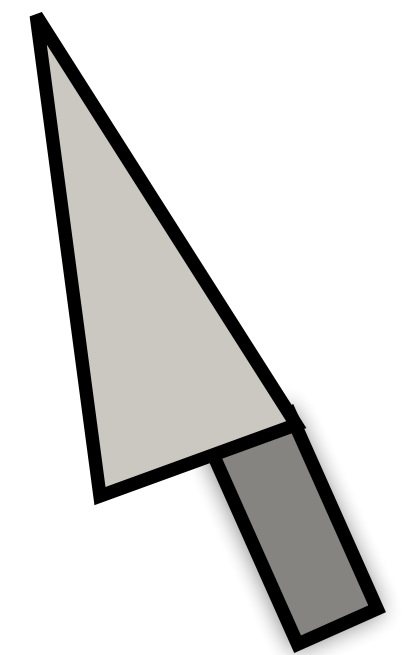
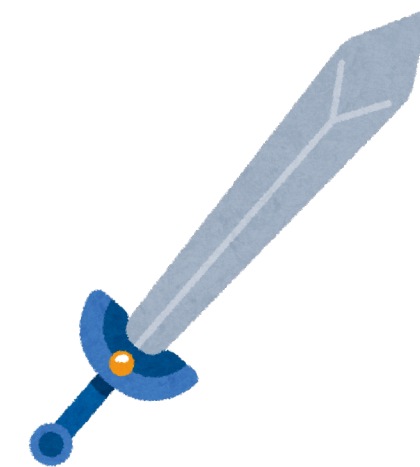
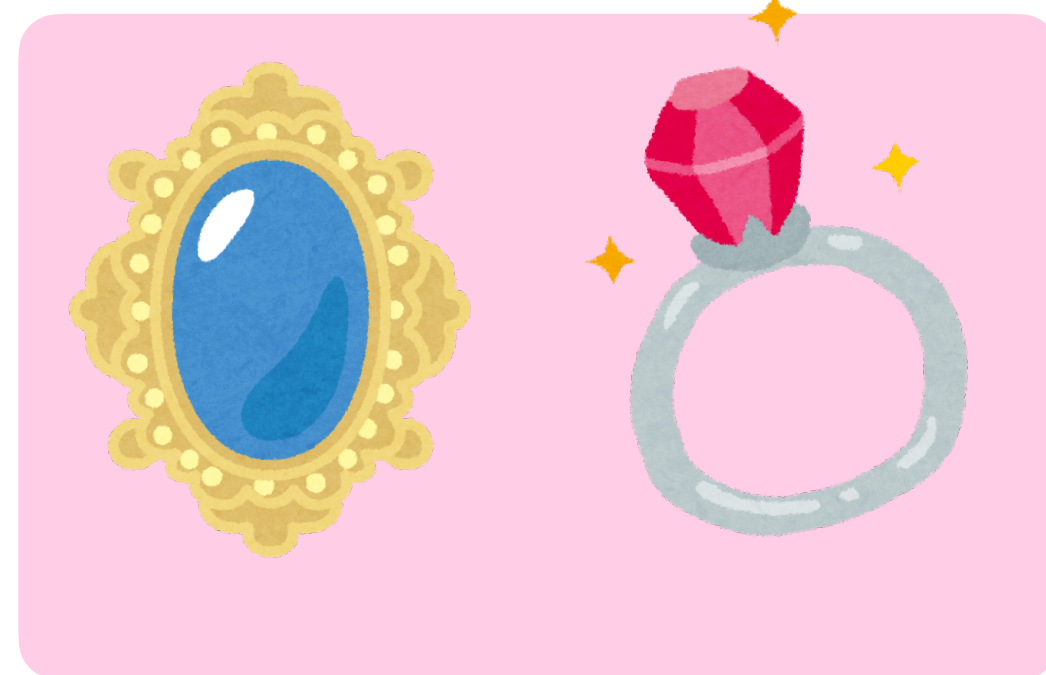
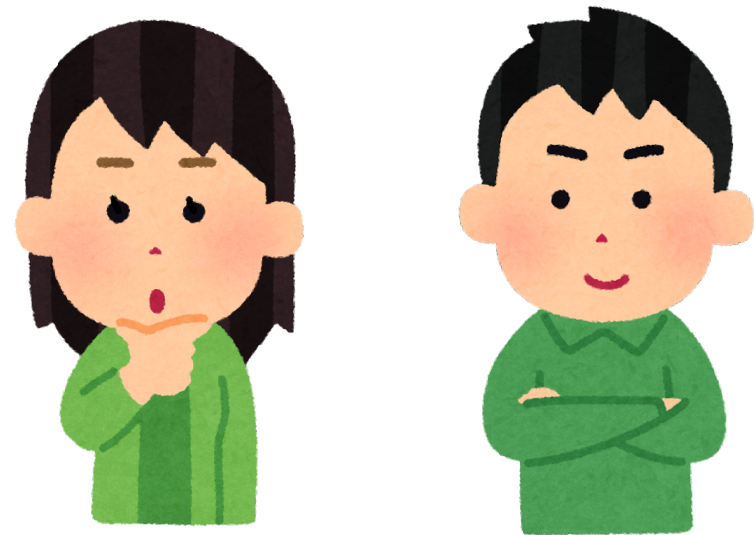


1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



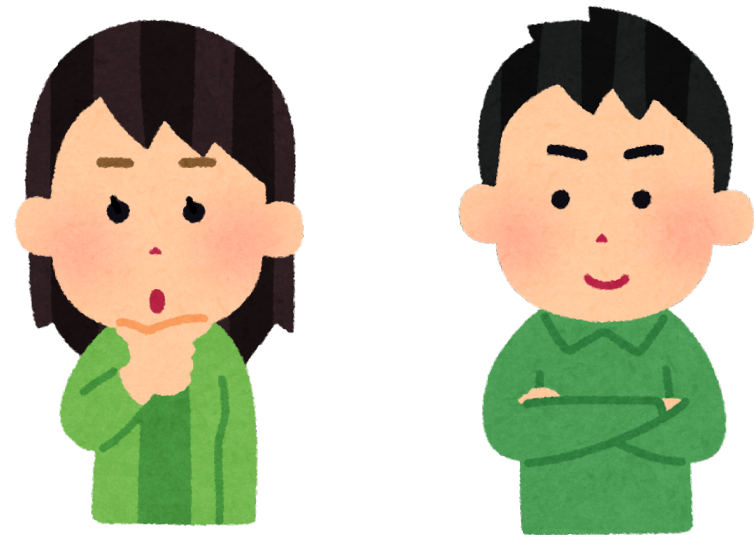
1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

近似的な公平性

- 2人で公平に分けるには？
 - Cut and Choose Protocolを離散化する.

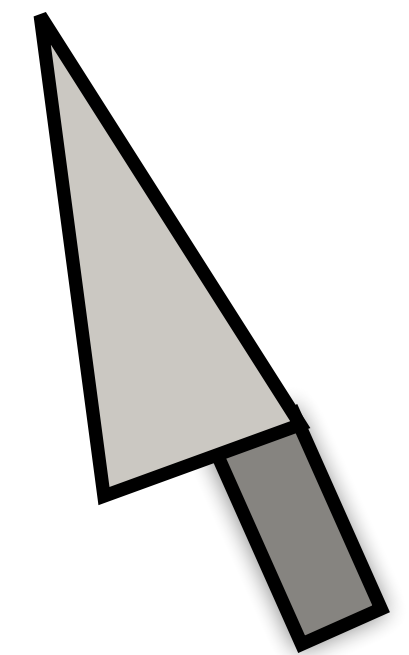
2. ボブが好きな方を選ぶ.

EF1!



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

3. アリスが残りをとる.



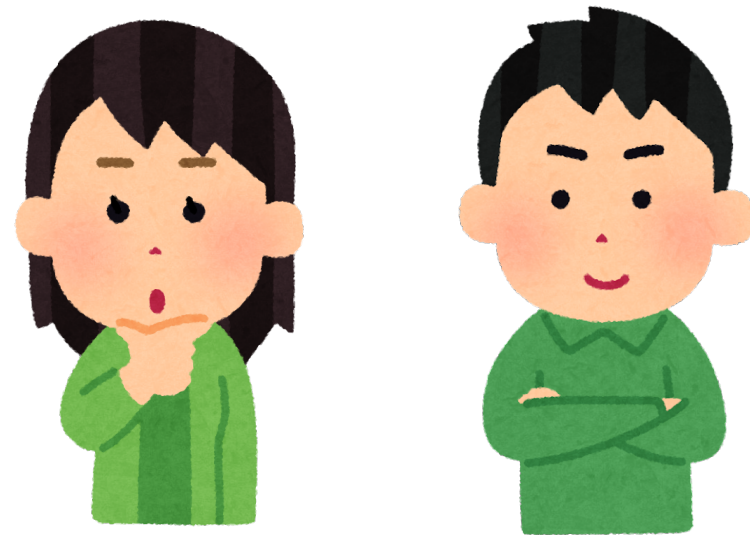
近似的な公平性

- n 人エージェント:
EF1 配分は存在し, 効率的に計算可能
(Lipton et al. 2004)

- 2人で公平に分けるには？

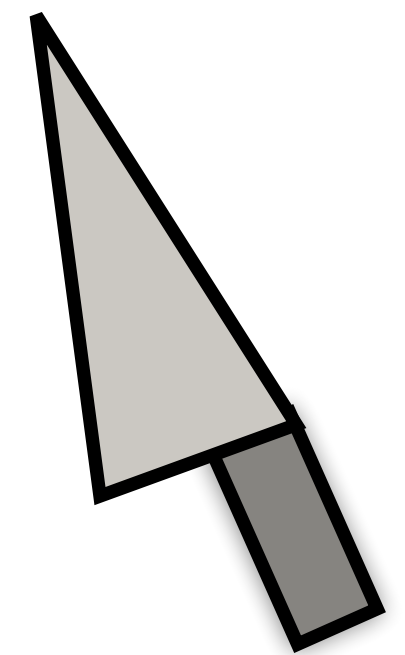
- Cut and Choose Protocolを離散化する.

2. ボブが好きな方を選ぶ.



1. アリスがアイテムを
おおよそ半分に分ける点を指定

3. アリスが残りをとる.



公平性と効率性の両立

- 公平分割理論の究極的なゴール：
公平性を満たすだけでは、十分ではない。

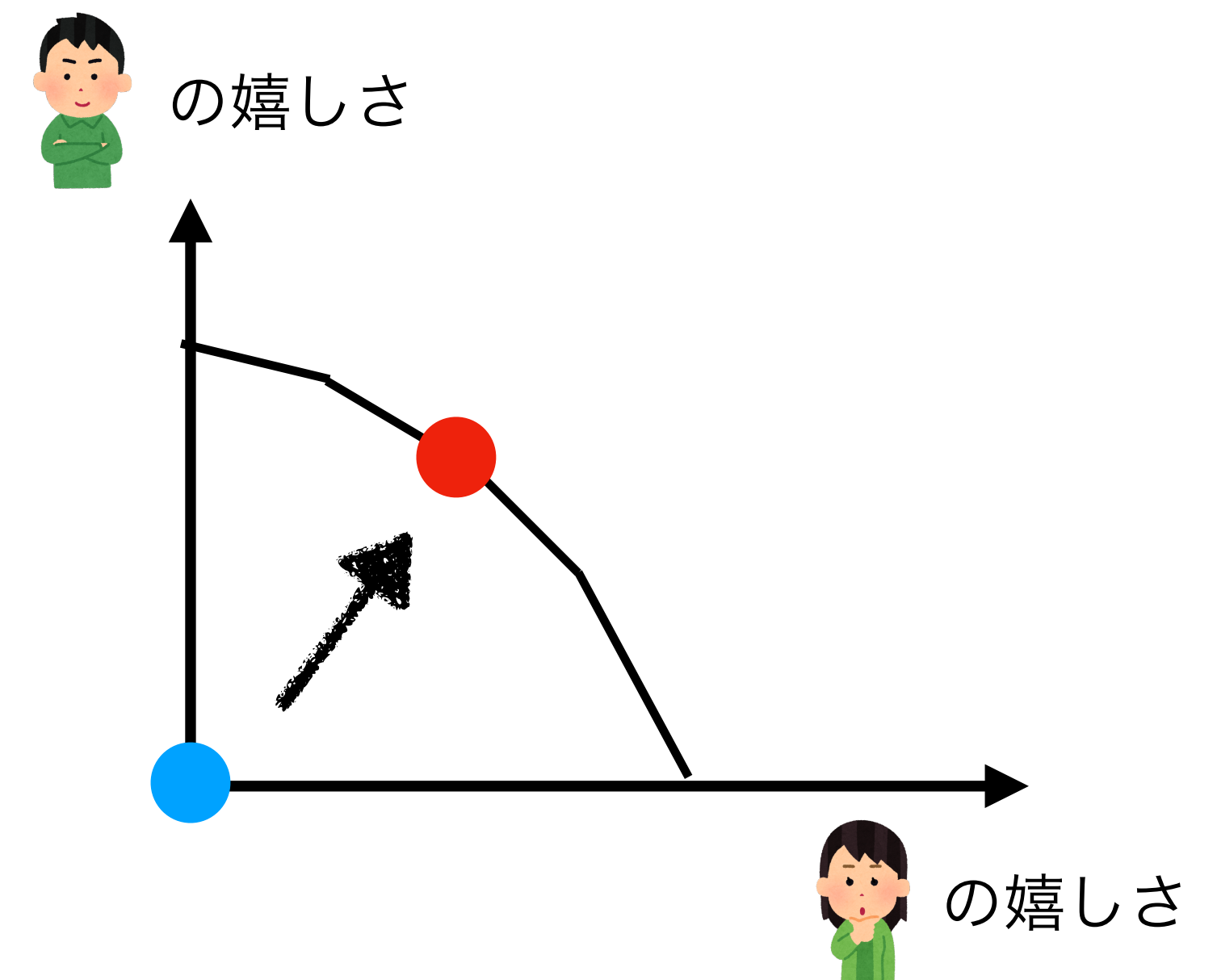
何も配分しないという配分もある意味公平。
→ 現実には公平性と効率性との両立が求められる。

公平性と効率性の両立

- 公平分割理論の究極的なゴール：
公平性を満たすだけでは、十分ではない。

何も配分しないという配分もある意味公平。
→ 現実には公平性と効率性との両立が求められる。

- パレート最適性** (Pareto-optimality) :
 - 効率性の尺度の一つ。
 - 全員をより幸せにする配分が存在しない状態。
 - 例：効用の和を最大化 → パレート最適。



公平性と効率性の両立

- ・ 効用関数が加法的である場合, 効用の積を最大化する配分は, EF1 とパレート最適性を満たす.

$$\max \prod_{i \in N} u_i(A_i) \rightarrow \text{EF1 \& パレート最適}$$

- ・ 効用の積の最大化は, 2人エージェントにおいてもNP困難.

公平性と効率性の両立

- 勝者調整プロトコルを離散化 (Aziz et al. 2019) :
2人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.

 					
	5	4	2	1	10
	10	4	4	3	5

公平性と効率性の両立

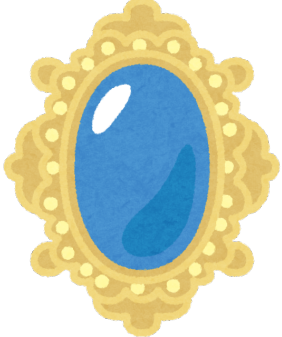
ステップ1. 勝者と敗者を決め, 暫定的に
勝者に全てのアイテムを配分する.

勝者



敗者



				
5	4	2	1	10
10	4	4	3	5

公平性と効率性の両立

ステップ2. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に並べる.

勝者



敗者

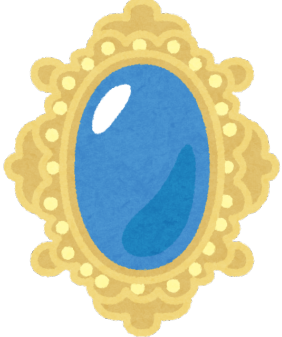


効用の比



の効用

の効用

				
5	4	2	1	10
10	4	4	3	5
2	1	2	3	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ2. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に並べる。

勝者



敗者



効用の比



の効用

の効用

				
1	5	2	4	10
3	10	4	4	5
3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ3. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に移す。

勝者



敗者



効用の比



の効用



の効用

				
1	5	2	4	10
3	10	4	4	5
3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

ステップ3. 敗者にとって価値が高く、
勝者にとって価値が低いアイテムを順番に移す。

勝者



敗者



効用の比



の効用

の効用

				
1	5	2	4	10
3	10	4	4	5
3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

配分がEF1になったら終了！

勝者



敗者



効用の比

の効用

の効用

				
1	5	2	4	10
3	10	4	4	5
3	2	2	1	1/2

公平性と効率性の両立

- 勝者調整プロトコルを離散化 (Aziz et al. 2019) :
2人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.

						
勝者		1	5	2	4	10
敗者		3	10	4	4	5
効用の比	 の効用 /  の効用	3	2	2	1	1/2

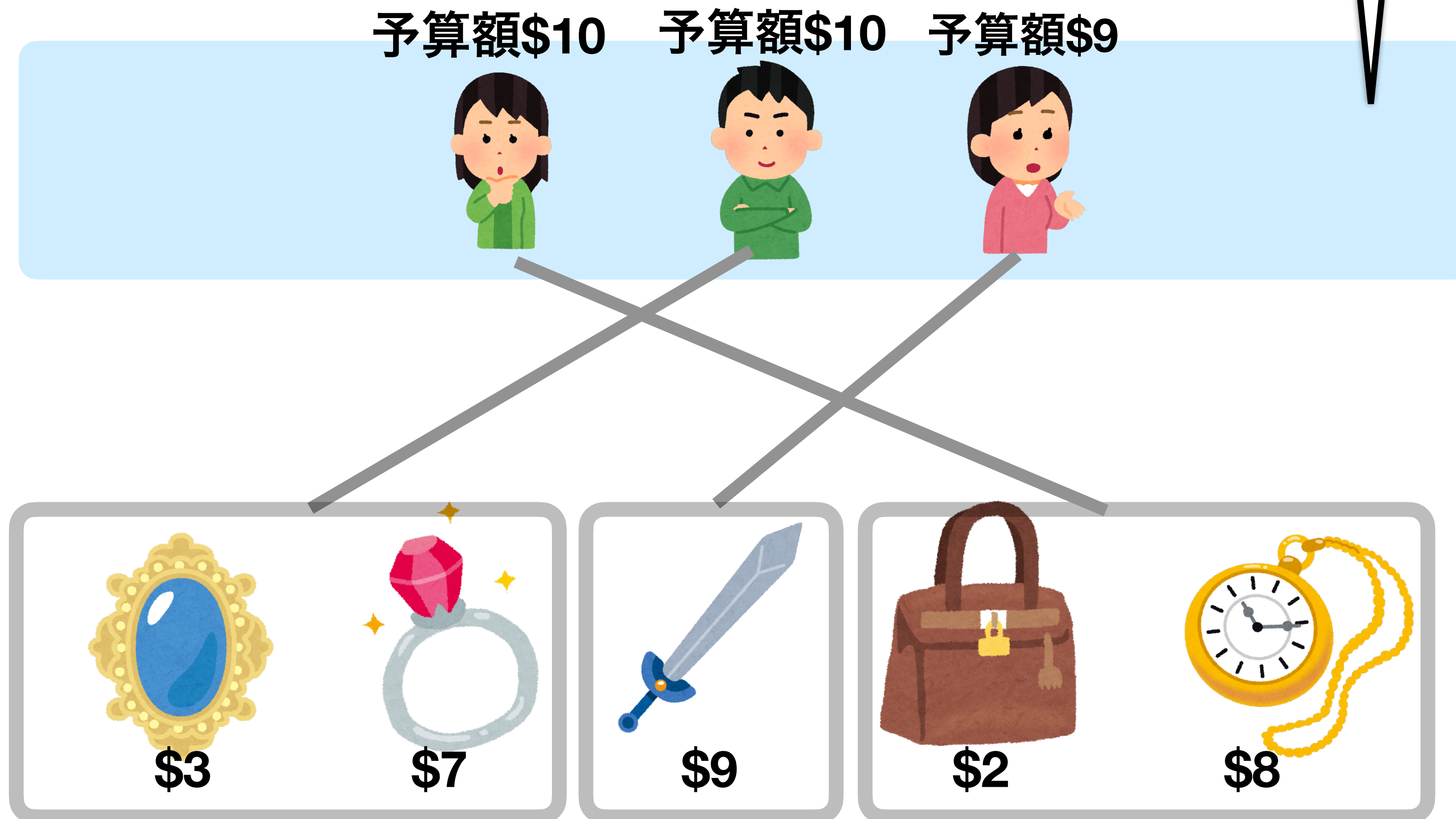
公平性と効率性の両立

- ・ 仮想市場を用いるアルゴリズム (Barman et al. 2018):
n人エージェントに対し, **EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する.



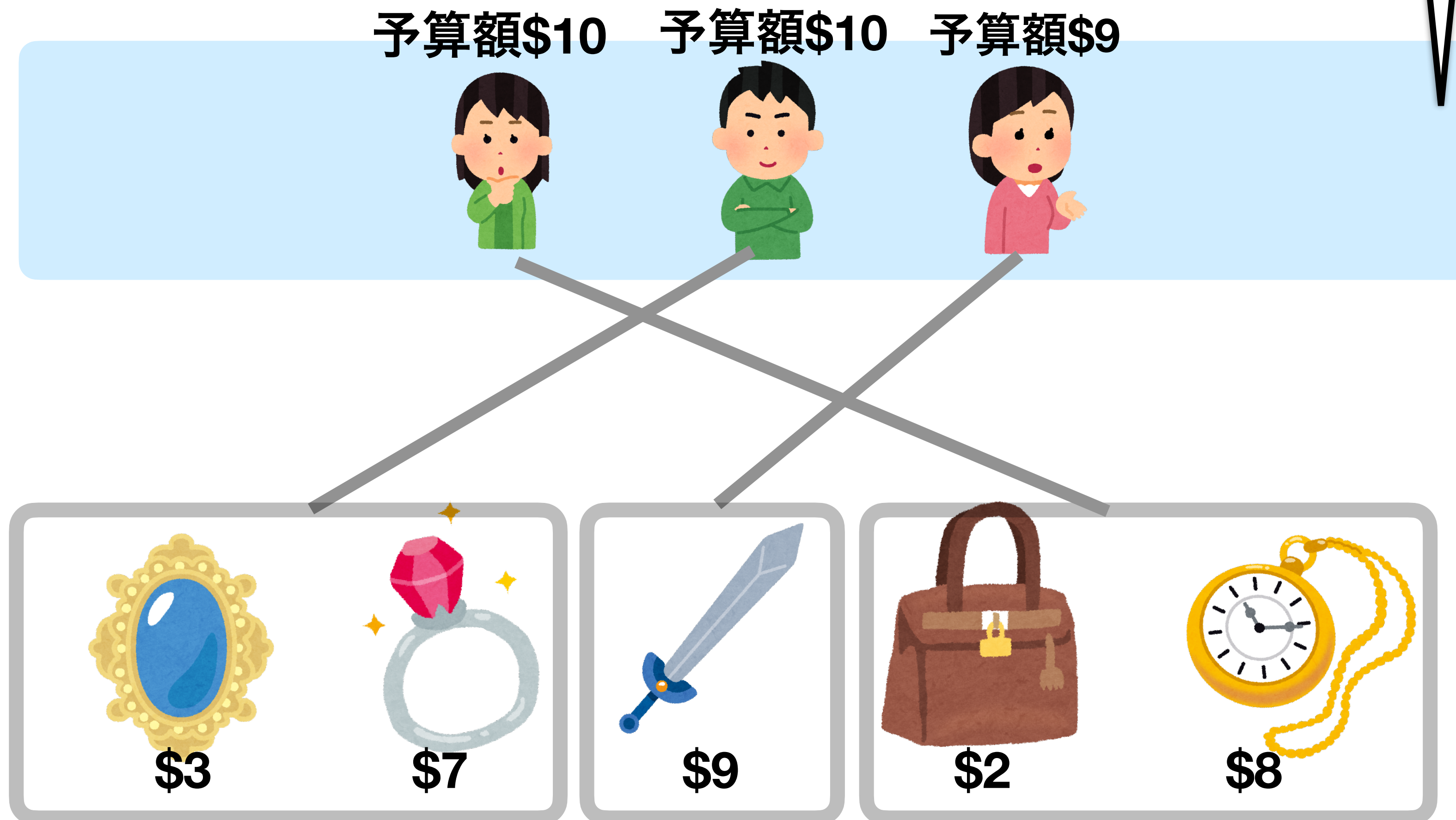
公平性と効率性の両立

市場均衡: 各エージェントが各々の予算の下で効用を最大化するような, 価格と配分のペア



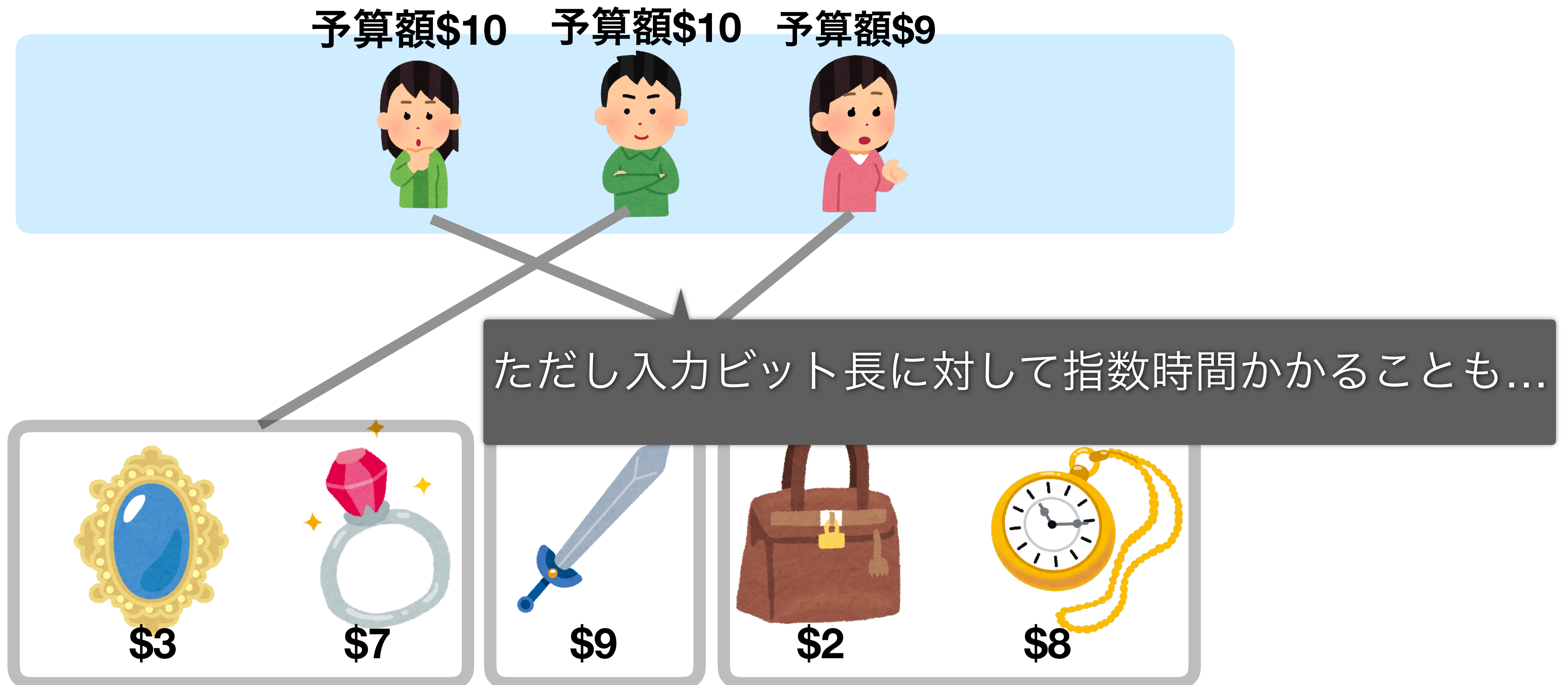
公平性と効率性の両立

ほぼ同一の予算の下（差が高々アイテム一個分の価格）
で市場均衡となる配分と価格のペア (A, p) を求める。



公平性と効率性の両立

- 仮想市場を用いるアルゴリズム (Barman et al. 2018):
n人エージェントに対し、**EF1** かつ **パレート最適**な配分を計算する。



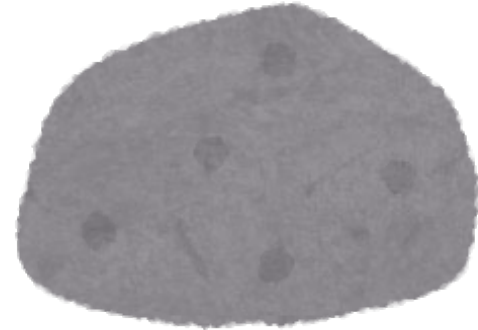
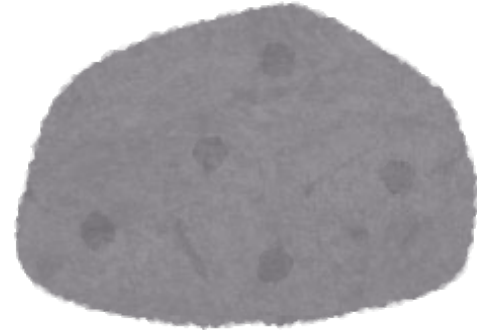
発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

EF1



		
3	1	1
3	1	1

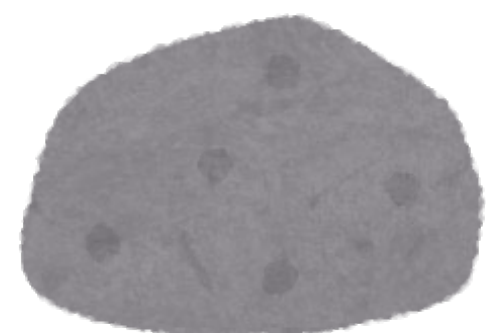
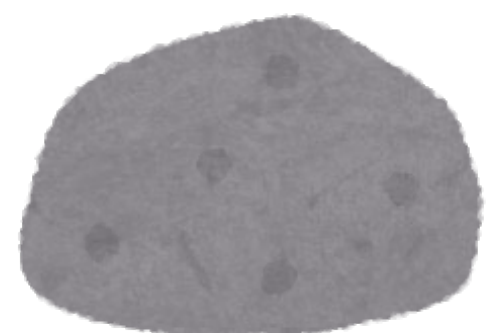
発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

No envy



		
3	1	1
3	1	1

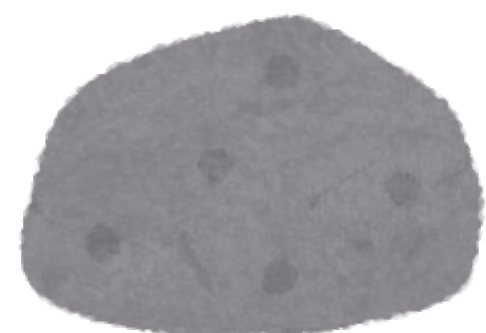
発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

Envy



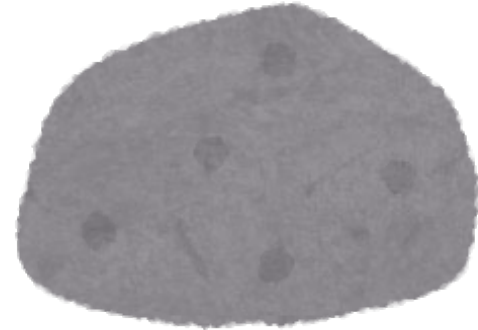
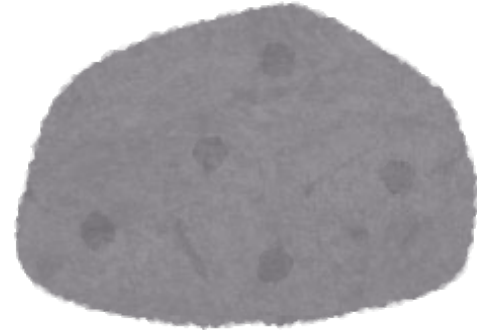
		
3	1	1
3	1	1

発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1 は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1 より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.



		
3	1	1
3	1	1

発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1 は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1 より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

EFX [Caragiannis et al., 2016]

$$\forall i, j \in N \quad u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$$

$$\text{または } \forall v \in A_j : u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus \{v\})$$

発展&今後の展開

今後の展開：

- ・ EF1は公平性の概念として弱いという意見もある. しかし, EF1より強い公平性の概念 (EFX) が存在するかどうかはわかっていない.

発展的な話題：

- ・ 他の公平性の基準: Equitability, Proportionality
- ・ ゲーム理論的な側面: エージェントが自分の好みに関して嘘をつく可能性
- ・ 仕事の配分: アイテムが多いほど嬉しいという仮定が成立しないこともある

まとめ・さいごに（高校生向け）

- ・ 数理にもとづいた手法を使うことで、透明性の高い意思決定を手助けできる.
- ・ ルール（アルゴリズム）の透明性・説明可能性の問題.

将来研究者になることに関心があるなら：

- ・ 自分の興味をとことん追求できる. 研究者になってよかったと思っています.
- ・ 研究の世界に国境はないので、英語はできた方が良くかも.
- ・ 参考図書：杉原厚吉 大学教授という仕事

引用文献

- Aziz, Caragiannis, Igarashi, and Walsh. Fair allocation of indivisible goods and chores. IJCAI 2019.
- Barman, Krishnamurthy, Vaish. Finding fair and efficient allocations, EC 2018
- Caragiannis, Kurokawa, Moulin, Procaccia, Shah, and Wang. The unreasonable fairness of maximum Nash welfare. EC 2016.
- Budish. The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes. Journal of Political Economy, 2011.
- Dubins and Spanier. How to cut a cake fairly. The American Mathematical Monthly, 1961.
- Foley. Resource Allocation and the Public Sector. Yale Economics Essay, 1967.
- Lipton, Markakis, Mossel, Saberi. On approximately fair allocations of indivisible goods. EC 2004.