

計算しない数学

— 意外と身近な離散数学 —

プリンシプル研究系

河原林 健一

(k_keniti@nii.ac.jp)

講演者の簡単な紹介



お好み焼き作製中

- 専門分野：数学・情報科学。
特に離散数学と理論計算機分野。
数学的興味は離散数学と、実用に応用可能な離散数学の両方に興味があります。でも計算が苦手。
- 趣味：スポーツ観戦・ジョギング・寝ること
猫と遊ぶこと・猫の写真を見ること
- 最近困ったこと：ワールドカップ観戦で寝不足。
隣のビルのビアガーデンの生演奏がうるさくて、夕方以降の仕事ができない。
飼い猫の一匹が私に反抗的。
- 最近分かったこと：猫にも「敵の敵は、味方」の理論が通じるらしい。

講演のアウトライン

- 実用的な問題を「数学的に」考えてみよう！
- 実用的問題には特に「離散数学」が使えるシーンが盛り沢山！
- 「離散数学」による解決法の基本を学ぼう！

実用的な問題を 「数学的」に考えてみよう

- 128人参加のテニストーナメントは、全部で何試合？
- 30人集まれば、90%以上というかなり高い確率で、同じ誕生日の人が2人以上いる?!
- 勝率9割の白鷗が、1場所中に連敗する確率は、3%以下?!

～離散数学を使った考え方の基礎～

テニスボール問題（基本編）

ここにテニスボールが12個あります。

その中で1つだけ、他のボールより少しだけ重い欠陥ボールがあります。

でも残念ながら、12個とも同じテニスボールの形をしているので、見ただけでは区別がつきません。

幸い、ここに「天秤」がありました。ただし天秤が使えるのは3回のみです。

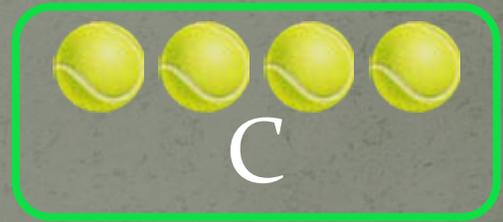
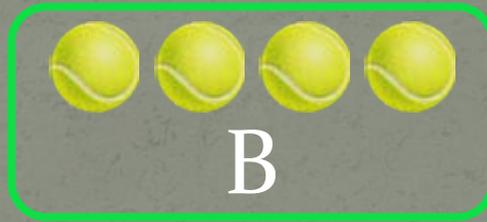


さあ、あなたはどうやって12個のボールの中から1個の欠陥ボールを発見しますか？



テニスボール問題（基本編）の答え

- まず12個のボールを3つのグループA・B・Cに分けます。それぞれのグループは4個のボールからなります。



- AとBそれぞれの4つのボールを天秤に乗せます（秤量1回目）。

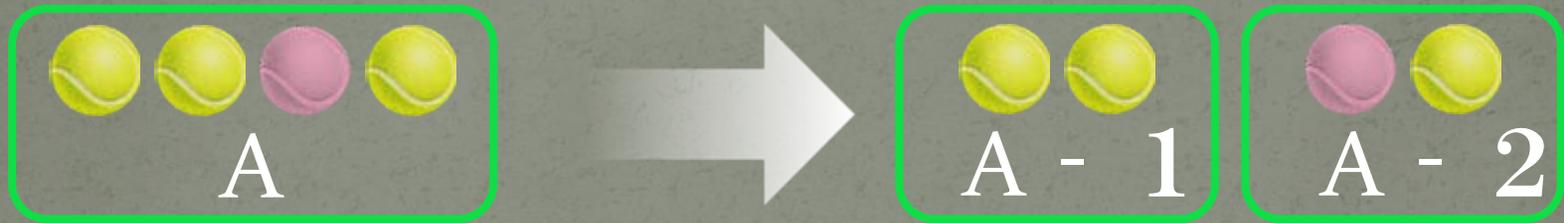


- もしAが重かったら、欠陥ボールはAの中に、同様にBが重かったら、欠陥ボールはBに含まれていることになります。
- もし釣りあったら、欠陥ボールはCに含まれていることになります。

これにより、1回の秤量で候補が4個に絞られる！₆

テニスボール問題（基本編）の答え 続き

- 欠陥ボールがAに含まれていたとします。そこでAのボールを2個ずつにわけ、天秤にかけます（秤量2回目）



- するとどちらか2個が重い結果となるはずです。すなわち秤量2回目で、最後の2個の候補に絞ることができるのです。
- 最後にもう1回天秤を使って、重いボールを割り出します（秤量3回目）。



テニスボール問題（基本編）の発展問題

- 前の問題では，重いボールは1個だけでした。
- では，重いか軽いかわからないボールが1個だけ含まれている場合，秤量4回で欠陥品を判別することは可能ですか？
- また，ボールが100個ある場合，重いか軽いかわからない欠陥ボールを1個だけ見つけるのに天秤を何回使用すればよいですか？

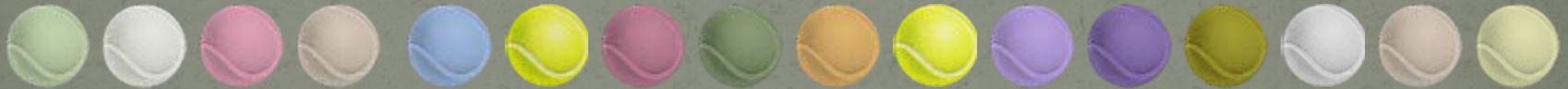


テニスボール問題（応用編）

問題：重さが全て異なるボールが16個あります。

今回も見た目では区別がつきません。

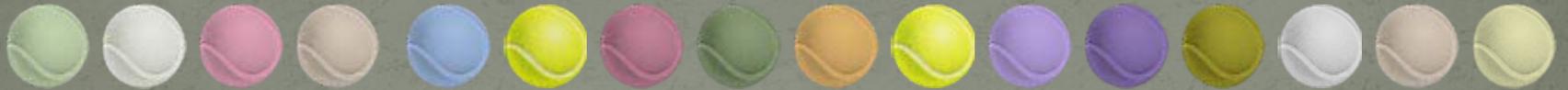
これらのボールを重い順に並び変えて下さい。



- ただし、1回の作業では2個のボールしか比べられません。
- 何回の作業で、全てのボールを重い順に並び変えることが可能でしょうか？

テニスボール問題 (応用編)

解決法(その1)



① いちばん最初のボール2つ   を比較して重い方を決定。

重

軽

② ①の重い方  **重** と3番目のボール  を比較して重い方を決定。

軽

重

③ ②で抽出した重い方  **重** と4番目のボール  を比較して重い方を決定する...

重

軽

④ これを15回繰り返すと最も重いボールが決まります。

⑤ 同様の手続きで2番目に重いボールも決まります。 10

テニスボール問題 (応用編)

解決法(その1) 続き

- この総当たり戦のやり方で、全てのボールを重い順に並べることができます。
- では全てのボールを並べかえるためには全部で何回の比較作業が必要でしょうか？

$$15 + 14 + 13 + \dots + 3 + 2 + 1 = 120$$



膨大な作業回数が必要！！！！



もっと少ない作業回数で判別したい！

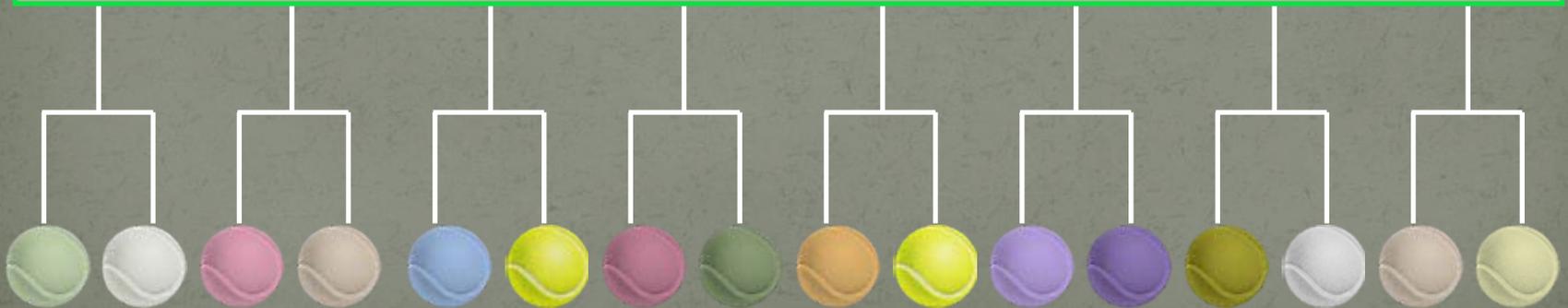
テニスボール問題 (応用編)

解決法(その2)

問題：重さが全て異なるボールが16個あります。
これらのボールを重い順に並び変えて下さい。

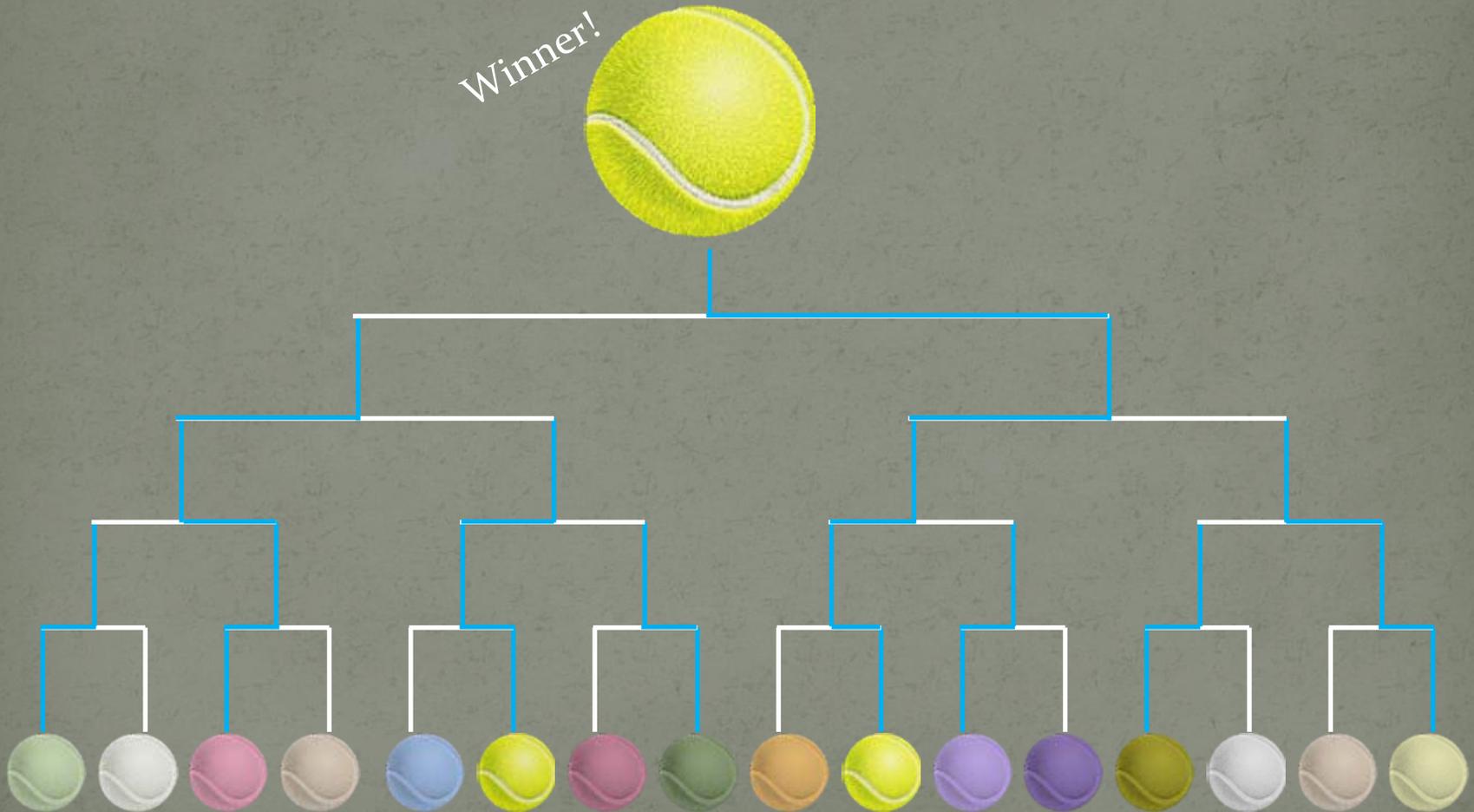


トーナメント制で比較してみよう！！



テニスボール問題 (応用編)

解決法(その2) 続き



● テニスボール問題 (応用編)

解決法(その2) 続き

● トーナメント制判別法の特徴



1. **優勝者は**常に全体の中で**一番重いボール**である！
2. **準優勝者は**, その山の中では一番重いボールであるが, 全体の中で**2番目に重いボール**であるとは限らない！
3. 2番目に重いボールを決定するためには, 準決勝・準々決勝・1回戦で優勝者に負けた相手と準優勝者が対戦する必要がある⇒2番目に重いボールが決定！
4. 1位2位を決めるための試合数(比較作業回数)は, 最も多い場合で $15 + 3 = 18$ 回(総当たり戦では29回)。
5. 総当たり戦と比較して, 1位・2位を決定するのに, 11回分比較回数が少なく済んでいる。



テニスボール問題 (応用編)

解決法(その2) 続き

● トーナメント制判別法の特徴 続き

6. それでは、3位以下はどのように決定するのでしょうか？皆さんで考えてみて下さい。
7. トーナメント制判別法で全ての並び替えをするために必要な回数は最も多くて64回（総当たり戦では120回の比較作業が必要）。
8. さらに少ない比較回数で重さの並び替えをするためには、隣り合う敗者同士で比較すればよい。

テニスボール問題からソーティングへ

このテニスボール問題における様々な解決方法は、実はコンピュータの「ソーティング」という動作で行われているプロセスと同じなのです！

- コンピューターは、入力数字を「数」として認識していないため、「大小」を瞬時に判断することはできない！
- コンピューターは1回の動作で1つの作業しかできない。
つまり、3つの数字の大小を「1回」で決定することはできない。
- 1回の作業で判別が可能なのは2つの数字の大小のみ。



何回の作業があれば、数字を大きい順に並べ替えることが可能か？

⇒コンピュータの速度を決定する大きな要因の一つ

ちょっとだけ専門的な話

アルゴリズムの計算量

- このテニスボール問題で用いた解決方法を「アルゴリズム」とよびます。
 - アルゴリズム（問題解決）に要する時間を「計算量」とよびます。
 - 「計算量」は、「入力数」（テニスボールの数）の関数。
 - テニスボール問題において、 N 個のボールに関する解法にかかる回数（計算量）は，
 1. 総当たり戦では $N(N-1)/2$.
 2. トーナメント方式では，およそ $N \times \text{LOG } N$.
- * ここで $\text{LOG } N$ とは， N チーム（ここでは N 個のボール）で構成されるトーナメントにおいて，優勝するために必要な勝利数。

ちょっとだけ専門的な話

アルゴリズムの計算量

- アルゴリズム（解決法）が存在しても、解くのにとても時間がかかっては実用的ではない。

⇒ **高速化の必要性**

- 例えばテニスボール問題を、 $N=100,000,000$ （テニスボール1億個）でコンピューターに実行させると...
 1. 総当たり戦だと問題を解くのに100日必要。
 2. トーナメント戦だと、1000分で済む！

しかし、解くのに N^3 , N^5 , 2^N , 3^N の計算量が必要なアルゴリズムだと必要計算時間は膨大な長さになる。

データ量Nの問題を解く時間量

		入力するデータ量(n)					
		10	20	30	40	50	60
アルゴリズム の種類	n^2	0.000 1秒	0.0004 秒	0.0009 秒	0.0016 秒	0.0025 秒	0.0036 秒
	n^3	0.001 秒	0.008 秒	0.027 秒	0.064 秒	0.125 秒	0.216 秒
	n^5	0.1秒	3.2秒	24.8秒	1.7分	5.2分	13分
	2^n	0.001 秒	1秒	17.9分	12.7日	35.7年	306世 紀
	3^n	0.059 秒	58分	6.5年	3855 世紀	2×10^8 世紀	1.3×10^{13} 世紀

離散数学が実用面で役立つこと

- 巨大データを扱わなければいけない問題（例えば、サイズが1億のデータを扱う国勢調査など）では、サイズの入力に対して、 N か $N \times \text{LOG } N$ の計算量のアルゴリズムのみが実用的。

テニスボール問題において、 N 個のボールに関する解法にかかる回数（計算量）は、

1. 総当たり戦では $N(N-1)/2$.
2. トーナメント方式では、およそ $N \times \text{LOG } N$.



したがって巨大データを扱う場面では、トーナメント方式のみ実用的な計算量（時間）で処理が可能。

離散数学を使うことにより、アルゴリズムの高速化が可能になる！！

ちょっと脇道...

パ・リーグの試合日程

- プロ野球，特にパシフィックリーグの対戦組み合わせ日程の組み方も離散数学の手法を使って最適化することが可能

パ・リーグ6球団(北海道日本ハム，仙台楽天，千葉ロッテ，埼玉西武，大阪オリックス，福岡ソフトバンク)の試合日程を組む際，できるだけ各球団の移動距離を短くする(コストダウン)ためには，どのような日程の組み方が最適でしょうか？



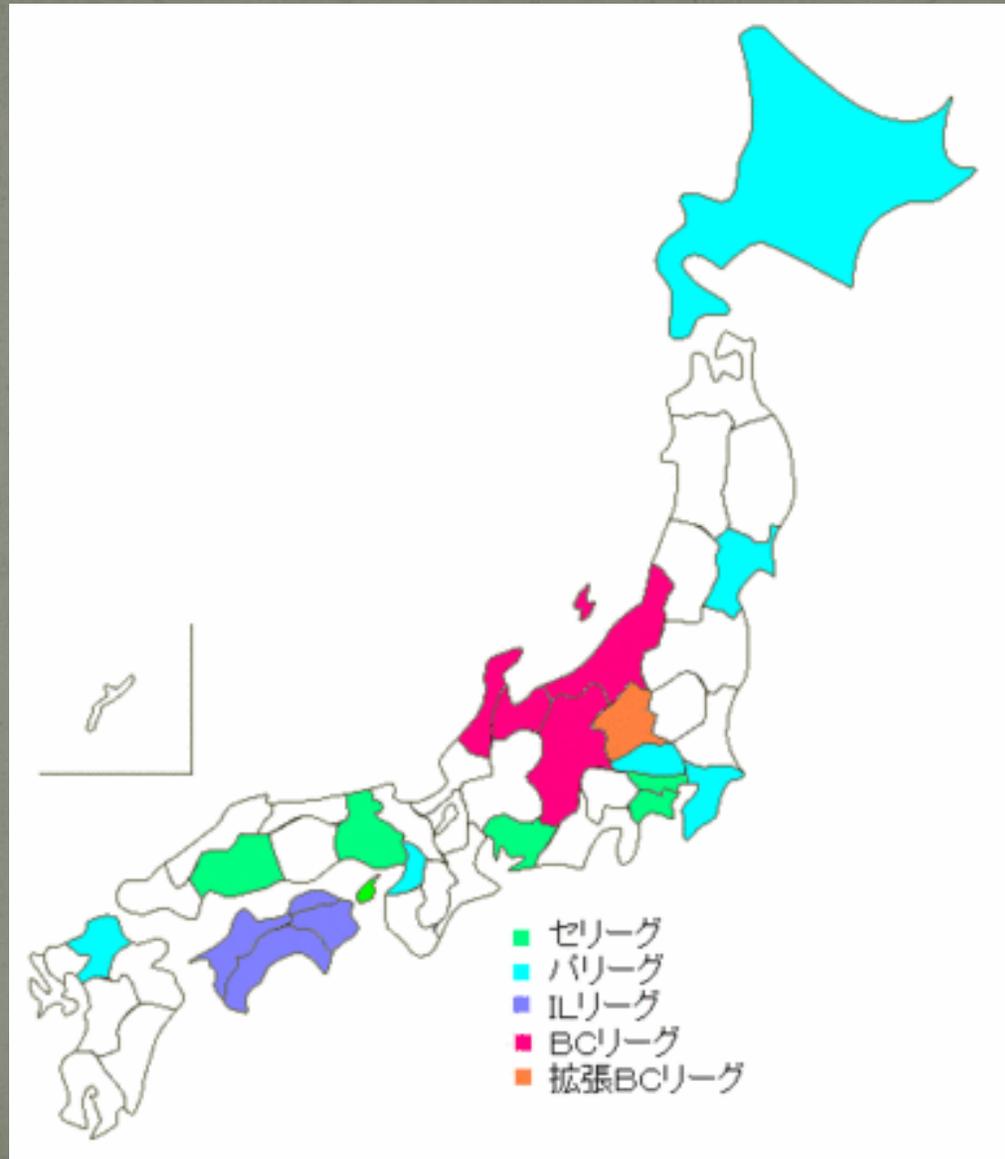
離散数学の手法を使って解ける典型的な実用例！₂₁

パ・リーグの試合日程

- 問題：**各チーム120試合**（同一カード(例：北海道日本ハムvs東北楽天)で年間24試合←12試合×2(ホーム&アウェイ). この24試合をそれぞれのチームが異なる5球団を相手として行うので、 $24 \times 5 = 120$ 試合) **の日程を組む**.
- その際、可能な限り移動距離を短くする（コストダウン）ためには、どのような日程が最適でしょうか？
- ただし、必ず下記の条件を満たしてください。

1. 1つのカードでは、3連戦まで可。例えば、東北楽天vs千葉ロッテ戦は、3連戦まで可。
2. 4カード連続のホーム、またはアウェイは禁止。つまり9試合連続ホーム、または9試合連続アウェイが最長。
3. 1か月の中でなるべくホームでの試合数とアウェイでの試合数を均等にする。

プロ野球の球団本拠地



パ・リーグの試合日程

- もし前記の制限がなければ，最適，つまり移動距離が最短の試合日程は
 1. 12試合連続してホーム，またはアウェイで同一チームと対決。

例) 北海道日本ハムと東北楽天が，12試合連続して札幌ドームで対戦。
東北楽天はこの12試合で，札幌ドームでの試合は終了。
その後，札幌ドームでの試合はなし。
 2. これを9回繰り返す。

しかし12試合連続同一カードは禁止！

現在は3試合連続または6試合連続ホーム，またはアウェイを基本とした試合日程が採用されています。

新しいスケジュールの提案

- 3カード連続ホーム，もしくは3カード連続アウェイを基本とした試合日程（つまり9試合連続ホームもしくは9試合連続アウェイ）。
↑メジャーリーグ方式。
- どのチームも，ホームの試合消化数とアウェイの試合消化数の差が6試合以内となるようにする(現在の試合日程もこのルールに則っている)。
- どの他球団とも，ほぼ均等に試合を消化するようにする（具体的には消化試合差が3試合以内になるようにする）。

現行のスケジュールリングでは，8月末の段階で東北楽天vs福岡ソフトバンクが20試合消化するのに対して，東北楽天vs北海道日本ハムは14試合しか消化しない状況が発生し，消化試合差が6試合以上離れるケースが存在します。

今シーズンのパ・リーグの対戦スケジュール

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42		
Chiba	S	H	T	O	F	S	H	O	T	F	F	H	O	-	T	O	H	F	S	T	F	O	S	H	-	S	F	T	O	H	T	H	O	S	F	T	H	O	S	F	T	F	O	
Tohoku	O	S	C	F	H	O	S	F	C	H	F	O	S	H	-	C	S	F	O	H	C	S	F	H	O	-	F	O	C	H	S	C	O	F	H	S	C	S	F	O	H	C	H	S
Hokkaido	F	C	O	S	T	F	C	S	O	T	O	S	C	T	-	O	F	C	S	T	F	O	S	T	C	-	O	S	F	T	C	F	C	S	T	O	F	C	S	F	T	O	T	F
Orix	T	F	H	C	S	T	F	C	H	S	H	T	F	C	-	H	C	S	T	F	S	H	C	F	T	-	H	T	S	C	F	S	T	C	F	H	S	F	C	T	S	H	C	
Fukuoka	H	O	S	T	C	H	O	T	S	C	T	C	O	S	-	S	H	T	C	O	H	C	T	O	S	-	T	C	H	S	O	H	S	T	O	C	H	O	T	H	C	S	C	H
Saitama	C	T	F	H	O	C	T	H	F	O	C	H	T	F	-	F	T	O	H	C	O	T	H	C	F	-	C	H	O	F	T	O	F	H	C	T	O	T	H	C	O	F	T	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chiba	S	H	T	O	F	S	H	O	T	F
Tohoku	O	S	C	F	H	O	S	F	C	H
Hokkaido	F	C	O	S	T	F	C	S	O	T
Orix	T	F	H	C	S	T	F	C	H	S
Fukuoka	H	O	S	T	C	H	O	T	S	C
Saitama	C	T	F	H	O	C	T	H	F	O

新しい対戦スケジュールの提案

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Chiba	S	T	O	F	H	O	F	T	H	S	T	H	S	O	F	S	T	O	F	H	O	F	T	H	S	T	H	S	O	F	S	T	O	F	H	O	F	H	S	T
Tohoku	O	C	H	S	F	H	S	C	F	O	C	O	F	S	H	O	C	H	S	F	H	S	C	F	O	C	O	F	S	H	O	C	H	S	F	H	S	F	O	C
Hokkaido	F	S	T	O	C	T	O	S	C	F	S	C	O	F	T	F	S	T	O	C	T	O	S	C	F	S	C	O	F	T	F	S	T	O	C	T	O	C	F	S
Orix	T	F	C	H	S	C	H	F	S	T	F	T	H	C	S	T	F	C	H	S	C	H	F	S	T	F	T	H	C	S	T	F	C	H	S	C	H	S	T	F
Fukuoka	H	O	S	C	T	S	C	O	T	H	O	S	T	H	C	H	O	S	C	T	S	C	O	T	H	O	S	T	H	C	H	O	S	C	T	S	C	T	H	O
Saitama	C	H	F	T	O	F	T	H	O	C	H	F	T	O	C	H	F	T	O	F	T	H	O	C	H	F	C	T	O	C	H	F	T	O	F	T	O	C	H	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Chiba	S	T	O	F	H	O	F	T	H	S
Tohoku	O	C	H	S	F	H	S	C	F	O
Hokkaido	F	S	T	O	C	T	O	S	C	F
Orix	T	F	C	H	S	C	H	F	S	T
Fukuoka	H	O	S	C	T	S	C	O	T	H
Saitama	C	H	F	T	O	F	T	H	O	C

新しい対戦スケジュールで 削減される移動距離

Chiba	合計移動距離 16,285 km = 現状から 26.7% 削減
Tohoku	合計移動距離 17,957 km = 現状から 24.5% 削減
Hokkaido	合計移動距離 21,553 km = 現状から 27.5% 削減
Orix	合計移動距離 18,540 km = 現状から 16.6% 削減
Fukuoka	合計移動距離 20,368 km = 現状から 38.7% 削減
Saitama	合計移動距離 18,374 km = 現状から 5.2% 削減

最新の研究で、さらに5%程度削減可能であることが明らかとなっている!!!

私の研究の一部を紹介

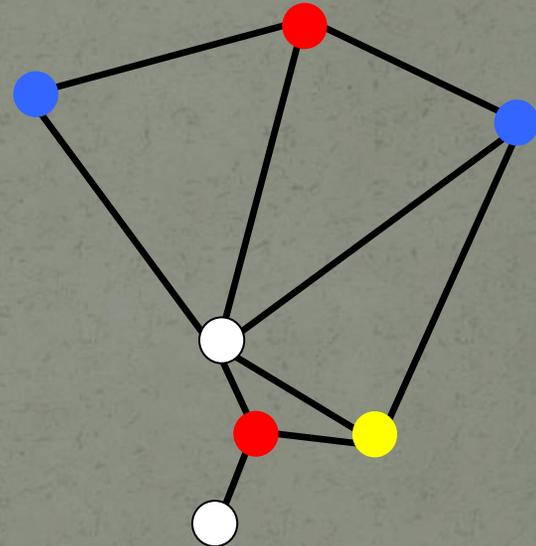
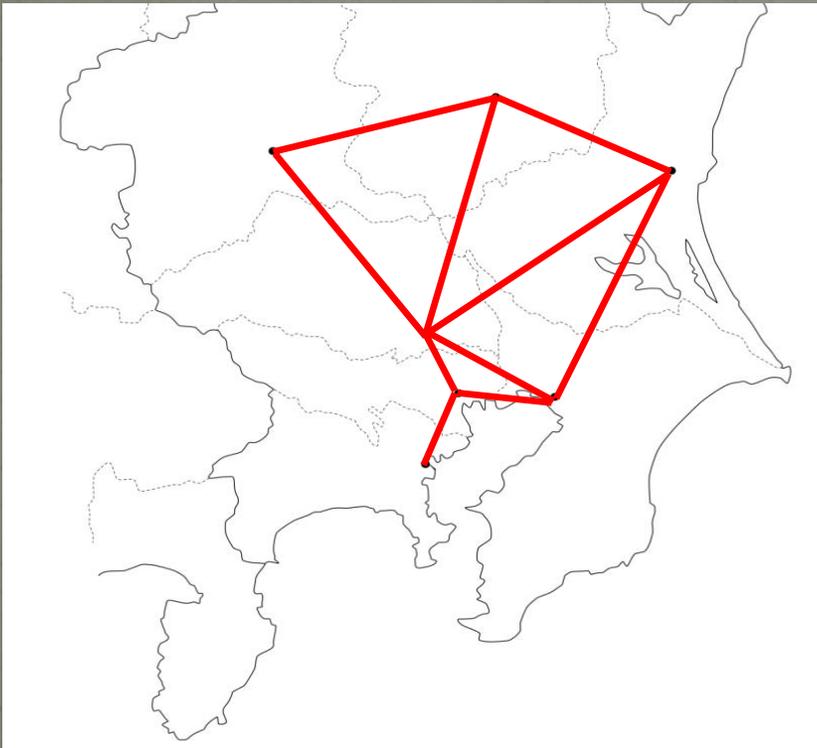
- 離散数学の中でも、特に平面構造をもつネットワーク解析（グラフ解析）を専門としています。
- 日常生活には、鉄道網・道路網等、平面構造をもつネットワークが数多く存在。
- 効率的なネットワーク設計を行うためにはネットワークを「平面構造」として捉え、理論的な解析を行うことが必要不可欠！
 - カーナビゲーションの高速情報アップデート等

ネットワークの解析のためには「平面ネットワーク」と「平面グラフ」の研究が必要不可欠！

私の研究の一部を紹介

平面グラフとは？

「辺をそれぞれ交差しないように平面上に描くことできるグラフ」



平面グラフの一例

私の研究の一部を紹介

しかし実際のネットワーク網は「**完全な平面**」とは限らない。
(例えば、交通網における立体交差や鉄道網での地下トンネル等)

→ 与えられたグラフが、**少しの交差を許した k 交差グラフ** (ネットワーク) であるかの判定を**線形時間**で行うことは可能か？

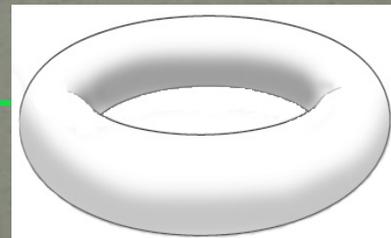
→ 与えられたグラフが、**少しのエラーを許した k -平面グラフ** (ネットワーク) であるかの判定を**線形時間**で行うことは可能か？...等を明らかにする必要がある

私の研究の一部を紹介

最近の研究で、与えられたグラフが、以下の性質のグラフ（ネットワーク）であるかを線形時間で判定することが可能であることを明らかにした。

(STOC'07,STOC'08,FOCS'08,FOCS'09等で発表)

1. k -平面グラフ(ネットワーク)
2. k 交差グラフ(ネットワーク)
3. 曲面上に埋め込めるグラフ(ネットワーク)
(例えばドーナツ状のトーラス)



トーラス

私の研究の一部を紹介

与えられたグラフが、 k -平面グラフ(ネットワーク)・ k 交差グラフ(ネットワーク)であるかを線形時間で判定することが可能！



→ k 交差グラフ (ネットワーク) での
データ更新の高速化が可能！

→ k -平面グラフ (ネットワーク) での
データ更新の高速化が可能！

(STOC'07, STOC'08, FOCS'08, FOCS'09等で発表)



カーナビゲーションのデータ更新の飛躍的な高速化への応用が期待されている！

まとめに代えて...

これからの離散数学 — 離散数学が向かう未来 —

- コンピュータのさらなる高速化への貢献
- エコに貢献する離散数学
 - 例) 輸送コストの削減, 電力コストの削減等
- GPS (カーナビゲーションシステム) の高速化への貢献
- WEB検索エンジンの高速化への貢献

皆さんの身近にも離散数学はたくさん活用されています。ぜひ日々の生活の中で、身近に存在する離散数学に目を向けてみて下さい。

ご清聴ありがとうございました！

Thank you for your
attention!

Any Question?

Many Thanks!

